

Uitwerking tentamen 30-10-2020

1a) Alle gevallen $A, B, C = 0, 1$ agaan, bij voorbeeld:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow C$	$A \wedge C$	$A \wedge C \rightarrow B$	uitp.
1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1

en zo voort

1b) $[A \wedge \neg B \rightarrow C]$

NB mogelijk zonde [-] zie (1.47)

$[A \wedge \neg C]$

$[\neg B]$

inleiding aannamen

A $\neg C$

$\neg B$

r. 7 (2x), r. 1

$A \wedge \neg B$

r. 0

C

MP op $A \wedge \neg B \rightarrow C$

en $A \wedge \neg B$

$\neg C$

C

2.1 (2x)

⊥

regel F

B

regel 2, opheffing
aannamen $[\neg B]$

$(A \wedge \neg C) \rightarrow B$

regel 4, opheffing
aannamen $[A \wedge \neg C]$

$(A \wedge \neg B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge \neg C) \rightarrow B$

regel 4, opheffing
aannamen $[-]$ bovenaan

NB volgens (1.47) is ook

$A \wedge \neg B \rightarrow C$

correct.

$(A \wedge \neg C) \rightarrow B$

2.(a) 1.b. $\forall x \forall y \forall z ((x \setminus y \subset z) \rightarrow (x \setminus z \subset y))$ (X) (2)

Neem in de Janthetij/ stelling uit opgave 1 dus

$$(A \cap B \subset C) \rightarrow ((A \cap C) \subset B) \quad (1)$$

$$A := \cup \{x\}, B := \cup \{y\}, C := \cup \{z\}$$

$$(1) \Rightarrow ((\cup \{x\} \cap \cup \{y\}) \subset \cup \{z\}) \rightarrow (\cup \{x\} \cap \cup \{z\} \subset \cup \{y\}) \xRightarrow{\text{def}} (2.75)$$

$$(\cup \{x \setminus y\} \subset \cup \{z\}) \rightarrow (\cup \{x \setminus z\} \subset \cup \{y\})$$

$$\xRightarrow{\text{regel 11}} \forall u (\dots)$$

$$\xRightarrow{(2.92)} (\forall u (\cup \{x \setminus y\} \subset \cup \{z\}) \rightarrow (\cup \{x \setminus z\} \subset \cup \{y\}))$$

$$\xRightarrow{\text{def } C (2.77)} ((x \setminus y \subset z) \rightarrow (x \setminus z \subset y))$$

$$\xRightarrow{\text{r. 11 (3x)}} \text{Q.E.D.}$$

(b) 3x regel 12. (in willekeurige volgorde) bijvoorbeeld

$$1) \text{ met } x \sim x, F(x) := \forall y \forall z (x \setminus y \subset z \rightarrow x \setminus z \subset y), t := x$$

$$\Rightarrow \forall y \forall z (x \setminus y \subset z \rightarrow (x \setminus z \subset y))$$

$$2) \text{ met } x \sim y, F(y) := \forall z (x \setminus y \subset z \rightarrow (x \setminus z \subset y)), t := y$$

$$\Rightarrow \forall z (x \setminus y \subset z \rightarrow x \setminus z \subset y)$$

$$3) \text{ met } x \sim z, F(z) := (x \setminus y \subset z \rightarrow x \setminus z \subset y), t := z$$

$$\Rightarrow (x \setminus y \subset z) \rightarrow (x \setminus z \subset y) \text{ Q.E.D.}$$

- ③ $R \subset X \times X$ symmetrisch ($xRy \leftrightarrow yRx$)
 en transitief ($xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$)
 en $\forall x \in X \exists y \in X \ xRy$ ~~dit is niet nodig~~ $\textcircled{X}$

d.b.: R is equivalensierelatie, dus, eveneens reflexief

d.w.z. xRx . Bewijs:

Neem in transitiviteit: $z=x$ dus $xRy \wedge yRx \rightarrow xRx$

Waar xRy geldt wegen $\textcircled{X}$ van keuze y ,

van $z=y$ geldt eveneens symmetrie dus yRx ,

zodat transitiviteit xRx geeft, dus reflexief. $\square$

- ④ $S := S(X/\sim) \subset X$ met $p(S(y)) = y \ \forall y \in X/\sim$
 $S: X/\sim \rightarrow X$

(a) $\forall x$ heeft $[x] \cap S$ precies $p(x) = [x]$ een element:

i) minstens één: $S([x]) \in [x]$ geldt omdat

$$S([x]) \in [x] \stackrel{(3.20)}{\Leftrightarrow} S([x]) \sim x \stackrel{(3.21)}{\Leftrightarrow} [S([x])] = [x]$$

de conditie $p(S(y)) = y$ is: $[S([x])] = [x]$ dus ok

verder geldt $S([x]) \in S$ per definitie van S

$$\Rightarrow S([x]) \in [x] \cap S \quad \text{per def. 1.}$$

(ii) $[x] \cap S$ heeft hoogstens 1 element.

$$x_1 \in [x] \cap S \Rightarrow x_1 \sim x \text{ en } x_1 = S([x_1])$$

pas pfor

$$\Rightarrow [x_1] = [S([x_1])] \stackrel{\text{por id}}{\Rightarrow} [x_1] = [x_1] \stackrel{(3.21)}{\Rightarrow} x_1 \sim x_2$$

$$\Rightarrow X_2 \sim X \quad \left(\begin{array}{l} \text{want we hadden al } X_1 \sim X \\ \text{en nu ook } X \sim X_2 \Rightarrow X_1 \sim X \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow [X_2] = [X] \Rightarrow X_1 = S([X]).$$

Dus $S([X])$ is het eigenelement van $[X] \cap S$.

(b). Bep. $X/\sim \cong S (= S(X/\sim)).$

def. functies $f: X/\sim \rightarrow S$, $f([X]) := S([X])$

$$g: S \rightarrow X/\sim, g(X) := [X]$$

(dus g is de beperking van $p: X \rightarrow X/\sim$ tot $S \cap X$)

Dan geldt i) $f \circ g = \text{id}_S$ oftewel $f(g(X)) = X$

oftewel $S([X]) = X$ wegens (a):

$X \in S$ is gegeven want g heeft als domein S .

ii) $g \circ f = \text{id}_{X/\sim}$ oftewel $[S([X])] = [X]$

dit is de eigenschap $p \circ S = \text{id}_{X/\sim}$ die staat

Dus f en g zijn elkaars inverse, dus f is

eenbijectie (Stelling 4.3). Q.E.D.

(5) (a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Dere valt in de eigenschap F(n).

Basis $n=0$: $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 = 2^0$

Inductie stap: stel $F(n)$ geldt, dan:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\
&= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \quad (5.24) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{n} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \stackrel{\text{induct. hyp.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \text{dass}
\end{aligned}$$

$\forall n (F(n) \rightarrow F(n+1))$ beweis, $F(0)$ wasal immer
 $\text{PA7} \Rightarrow \forall n F(n)$ $\hookrightarrow$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

darauf ist genau $F(n)$, Basis $F(1)$:

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} = 1 - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0 \quad \hookrightarrow$$

induct. step: selbde beweisen als oben und extra - teiler des

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k}$$

$$1 + (-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} \stackrel{(5.24)}{=} 0$$

$$1 - (-1)^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \quad (6)$$

$$= 1 - (-1)^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\rightarrow \binom{n}{0} = 0 \quad (\text{inductie hypothese niet nodig!})$$

⑥ Per def. van $\subseteq$ in $\mathbb{R}$ is te bewijzen:

$$Q_1 \subset Q_2 \rightarrow (Q_1 + Q_3 \subset Q_2 + Q_3) \quad (\Rightarrow)$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} (r \in Q_1 + Q_3 \rightarrow r \in Q_2 + Q_3)$$

Uit definitie opstelling in opgave volgt:

$$Q_1 + Q_3 = \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in Q_1, \exists q \in Q_3, p+q=r\}$$

$$Q_2 + Q_3 = \{r' \in \mathbb{Q} \mid \exists p' \in Q_2, \exists q' \in Q_3, p'+q'=r'\}$$

Te bewijzen dus: gegeven $Q_1 \subset Q_2$:

$$\forall r \in \mathbb{Q} ((\exists p \in Q_1, \exists q \in Q_3, p+q=r) \rightarrow$$

$$\exists p' \in Q_2, \exists q' \in Q_3, p'+q'=r)$$

(X)

Als $p \in Q_1$ een bepaalde ej. heeft, is er zeker $p' \in Q_2$ met dezelfde ej. nl. $p' = p$ (want $Q_1 \subset Q_2$)

Zekundair voor de gezochte p' en q' in (X) de

$p+q$ nemen die bestaan vanwege de aanname voor de

$p+q \rightarrow$ in (X) en daarmee geldt (X). $Q \in D$