Uitwerking Inleiding Wiskunde 2018 (maandag 29-10-2018, 08:30)

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) als je die gebruikt!

1. (a) Bewijs formeel $\vdash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma$.

   Het volgende korte bewijs wordt (met de juiste uitleg onder) goedgerekend: de opzet is om van boven de streep $(\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)$ oftewel $\alpha \to \gamma$ en $\neg\alpha \to \gamma$ te komen tot onder de streep γ. Deze opzet kan zelf weer worden geformaliseerd, door in het onderstaande bewijs eerst $[(\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)]$ als aanname in te voeren, daaruit door twee keer $\wedge$-Eliminatie apart $\alpha \to \gamma$ en $\neg\alpha \to \gamma$ te concluderen, dan verder als onder, en na het bereiken van γ op de onderste regel te concluderen dat $((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma$ via $\to$-Introductie, waarbij de aanname $[(\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)]$ wordt opgeheven.

$$\begin{array}{c}
\alpha \to \gamma \quad\; \neg\alpha \to \gamma \quad\; [\neg\gamma] \\ \hline
\neg\alpha \\ \hline
\gamma \\ \hline
\bot \\ \hline
\gamma
\end{array}$$

   Stap 1: Invoering aanname $[\neg\gamma]$.
   Stap 2: Modus tollens op $[\neg\gamma]$ en $\alpha \to \gamma$ geeft $\neg\alpha$.
   Stap 3: Modus ponens op $\neg\alpha$ en $\neg\alpha \to \gamma$ geeft γ. Het bewijs is hier nog niet klaar omdat de aanname $[\neg\gamma]$ nog moet worden opgeheven.
   Stap 4: $\neg$-Eliminatie, of: $\neg\gamma \equiv \gamma \to \bot$ en Modus ponens op $\gamma \to \bot$ en γ.
   Stap 5: RAA op aanname $[\neg\gamma]$, die nu pas mag worden opgeheven.

   (b) Bewijs formeel $\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma))) \to \gamma$.

   Zelfde inleidende opmerking als bij (a): dit is in feite een ingekort bewijs.

$$\begin{array}{c}
\alpha \vee \beta \quad\; \alpha \to \gamma \quad\; \beta \to \gamma \quad\; [\neg\alpha] \\ \hline
\beta \\ \hline
\gamma \\ \hline
\neg\alpha \to \gamma \\ \hline
\gamma
\end{array}$$

   Stap 1: Invoering aanname $[\neg\alpha]$.
   Stap 2: $\vee$-Eliminatie op $\alpha \vee \beta$ en $[\neg\alpha]$ geeft β.
   Stap 3: Modus ponens op β en $\beta \to \gamma$ geeft γ.
   Stap 4: $\to$-Introductie op $[\neg\alpha]$ en γ geeft $\neg\alpha \to \gamma$, opheffing aanname $[\neg\alpha]$.
   Stap 5: Onderdeel (a), haal desgewenst $\alpha \to \gamma$ nog op van de eerste regel.

   (c) Bewijs direct (zonder Stelling 1.6) dat $\vDash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma$.

   Uit de waarheidstabel voor $\to$ volgt dat de enige mogelijkheid voor de waarde $v(((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma) = 0$ is: $v((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) = 1$ en $v(\gamma) = 0$. Die mogelijkheid moeten we dus uitsluiten. De eerste $= 1$ en de tabel voor

$\wedge$ impliceren $v(\alpha \to \gamma) = 1$ en $v(\neg\alpha \to \gamma) = 1$. Als $v(\gamma) = 0$ dan volgt uit $v(\alpha \to \gamma) = 1$ en de waarheidstabel voor $\to$ dat $v(\alpha) = 0$. Maar uit $v(\gamma) = 0$ en $v(\neg\alpha \to \gamma) = 1$ volgt $v(\neg\alpha) = 0$, waaruit $v(\alpha) = 1$ via de tabel voor $\neg$. Tegenspraak, want zowel $v(\alpha) = 0$ als $v(\alpha) = 1$. Zo'n v bestaat dus niet, zodat $v(((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma) = 1$ voor alle v.

2. Stel X is een niet-lege verzameling.
   (a) Wat is $\cup P(X)$? Antwoord: $\cup P(X) = X$.

   Te bewijzen dat $z \in \cup P(X)$ desda $z \in X$. Eerst $z \in \cup P(X) \to (z \in X)$. Per definitie van $\cup$ geldt $z \in \cup Y$ desda $\exists_{y \in Y} z \in y$, dus met $Y = P(X)$ is dit: $z \in \cup P(X)$ desda $\exists_{y \in P(X)} z \in y$ oftewel $z \in \cup P(X)$ desda $\exists_{y \subset X} z \in y$. Maar $z \in y \subset X$ geeft $z \in X$ per definitie van het $\subset$ symbool.

   Omgekeerd: stel $z \in X$ en neem in de vorige regel $y = X$. Deze y voldoet aan $y \subset X$ (want $X \subset X$) en tevens aan $z \in y$, de aanname is immers $z \in X$. Dit geeft direct de implicatie $z \in X \to z \in \cup P(X)$. Dus $\cup P(X) = X$.

   (b) Wat is $\cap P(X)$? Antwoord: $\cap P(X) = \emptyset$.

   Per definitie van $\cap$ geldt $z \in \cap Y$ desda $\forall_{y \in Y} z \in y$, dus met $Y = P(X)$ is dit: $z \in \cap P(X)$ desda $\forall_{y \in P(X)} z \in y$ oftewel $z \in \cap P(X)$ desda $\forall_{y \subset X} z \in y$. Neem nu $y = \emptyset$, dan geldt inderdaad $y \subset X$ want $\emptyset \subset X$. Er is per definitie geen $z \in \emptyset$ dus vanwege de desda ook geen $z \in \cap P(X)$. Dus $\cap P(X) = \emptyset$.

3. (a) Stel $A \neq \emptyset$ is een *eindige* verzameling. Bewijs (bijv. met inductie naar het aantal elementen van A) dat voor iedere surjectie $f : A \to B$ een functie $s : B \to A$ bestaat zodat $f \circ s = \mathrm{id}_B$, oftewel $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$.

   De te bewijzen uitspraak $\varphi(n)$ is: voor iedere verzameling A met n elementen ($|A| = n$) en iedere surjectie $f : A \to B$ bestaat een functie $s : B \to A$ zodat $f \circ s = \mathrm{id}_B$. We nemen aan dat B niet leeg is (omdat er geen functie $f : A \to \emptyset$ bestaat is de claim logisch gesproken ook waar voor $B = \emptyset$).
   - *Basis*: we beginnen het bewijs door inductie met $n = 1$ en bewijzen $\varphi(1)$. Als $|A| = 1$ dan moet ook $|B| = 1$, anders kan f geen surjectie zijn, dus $A = \{x\}$ en $B = \{y\}$, zodat $f(x) = y$. Kies nu $s(y) = x$, dan volgt $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$, waarmee $\varphi(1)$ is bewezen.
   - *Inductiestap*: Stel $|A| = n + 1$ en kies $x_0 \in A$, met $A' := A - \{x_0\}$. Dan is $|A'| = n$. Beperk $f : A \to B$ tot $A' \subset A$, dit geeft $f' : A' \to B$ met $f'(x) = f(x)$ for alle $x \in A'$. Nu zijn er twee mogelijkheden:
     i. f' is surjectief. Dan is er volgens de inductiehypothese $\varphi(n)$ een functie $s' : B \to A'$ met $f(s'(y)) = y$ voor alle $y \in B$. Omdat $A' \subset A$, kunnen we nemen $s = s'$, en deze functie $s : B \to A$ voldoet net als s' aan $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$.
     ii. f' is niet surjectief. Omdat f per aanname surjectief is, moet gelden dat $B = B' \cup \{f(x_0)\}$, met $B' = f(A')$. Noem de beperking van $f : A \to B$ tot A' opnieuw f', dan is $f' : A' \to B'$ surjectief en

bestaat volgens de inductiehypothese $\varphi(n)$ een functie $s' : B' \to A'$ met $f(s'(y)) = y$ voor alle $y \in B'$. Definieer nu $s : B \to A$ als $s(y) = s'(y)$ voor alle $y \in B'$ en $s(f(x_0)) = x_0$. Dan geldt $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$: voor alle $y \in B'$ is dat waar wegens de inductiehypothese en voor $y = f(x_0)$ is het waar omdat $f(s(f(x_0))) = f(x_0)$. Hiermee is ook de inductiestap $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ bewezen.

Uit $\varphi(1)$ en $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ voor alle n volgt met het principe van inductie dat $\varphi(n)$ voor alle $n \geq 1$ en daarmee is de claim bewezen.

(b) Bewijs dat voor iedere *eindige* niet-lege verzameling X een 'keuzefunctie'

$$g : P(X)\backslash\{\emptyset\} \to X$$

bestaat met $g(a) \in a$ voor alle niet-lege $a \subset X$. Hint: neem in onderdeel (a)

$$A = \{\langle a, x\rangle \in (P(X)\backslash\{\emptyset\}) \times X \mid x \in a\};$$
$$B = P(X)\backslash\{\emptyset\}.$$

Neem $f : A \to B$ als $f(\langle a, x\rangle) = a$. Dit is inderdaad een surjectie, want iedere $a \in B$ is niet leeg, zodat er een $x \in a$ bestaat, waardoor er een element $\langle a, x\rangle \in A$ bestaat met $f(\langle a, x\rangle) = a$. Volgens onderdeel (a) bestaat $s : B \to A$ met $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in P(X)\backslash\{\emptyset\}$. Zo's functie s kan worden geschreven als $s(y) = \langle s_1(y), s_2(y)\rangle$ met $s_1(y) \in P(X)\backslash\{\emptyset\}$ en $s_2(y) \in X$. Vanwege de eis $x \in a$ op elementen van A volgt $s_2(y) \in s_1(y)$. De eigenschap $f(s(y)) = y$ geeft $s_1(y) = y$, zodat $s(y) = \langle y, s_2(y)\rangle$, met $s_2(y) \in y$. Kies nu $g(y) = s_2(y)$, dan volgt $g(y) \in y$.

4. Bewijs dat de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ overaftelbaar is.
Hint: bewijs ofwel dat er geen bijectie $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}$ kan bestaan, ofwel dat $\mathbb{R} \leqslant \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Methode 1. Stel er is een bijectie $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en schrijf $f_n := b(n)$. Bekijk de functie $g(n) = f_n(n)+1$. Omdat b surjectief is bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $g = f_m$, dus $g(n) = f_m(n)$ voor alle n, dus ook voor $n = m$. Dus $g(m) = f_m(m)$. Dat is $f_m(m)+1 = f_m(m)$ dus $1 = 0$. Tegenspraak en b kan dus niet bestaan.

Methode 2. De verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ omvat de verzameling V van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ waarvoor geldt $f(n) \in \{0, 1, \ldots 9\}$ voor alle $n > 0$. Via decimale expansies is de laatste verzameling gelijkmachtig met $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ en daarmee ook met $\mathbb{R}$. Daarmee is $V \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and $V \cong \mathbb{R}$. Volgens (bijvoorbeeld) voetnoot 10 op p. 64 volgt hieruit $\mathbb{R} \leqslant \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

5. Bewijs dat de volgende functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitief recursief zijn, dat wil zeggen: gedefinieerd kunnen worden volgens Stelling 6.5 (vind daarin dus g en h):

(a) $f(x) = y^x$ voor vaste $y \in \mathbb{N}$.

Neem $g = 1$ en $h(x_1, x_2) = x_1 \times y$, dan volgt $f(n+1) = h(f(n), n) = f(n) \times y$ met $f(0) = 1$ en dit is precies waar $f(x) = y^x$ aan voldoet.

(b) $f(0) = 0$ en $f(x) = x - 1$ voor alle $x > 0$.

Neem $g = 0$ en $h(x_1, x_2) = x_2$, verder argument is analoog aan (a).

6. De Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$ vormen een deelverzameling $CR(\mathbb{Q})$ van de verzameling $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ en vormen dus zelf een verzameling. We definiëren nu een relatie $\sim$ op $CR(\mathbb{Q})$ door: $f \sim g$ desda $\lim_{n\to\infty}(f_n - g_n) = 0$, oftewel: $f \sim g$ desda $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N} |f(n) - g(n)| < \varepsilon$. Cantor definieerde de reële getallen als $\mathbb{R}_C := CR(\mathbb{Q})/\sim$ (men kan bewijzen dat $\mathbb{R}_C \cong \mathbb{R}$ volgens Dedekind).

   (a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

      i. *Reflexief* ($f \overset{?}{\sim} f$): er geldt $|f(n) - f(n)| = 0 < \varepsilon$ voor alle n, dus voor gegeven $\varepsilon > 0$ kun je N willekeurig nemen (in de definitie van $\sim$), bijv. $N = 0$, en dan volgt $f \sim f$.

      ii. *Symmetrisch* ($f \sim g \overset{?}{\leftrightarrow} g \sim f$): stel $f \sim g$, dan er is bij gegeven ε een N etc. Precies dezelfde N voldoet om $g \sim f$ te bewijzen, omdat $|g(n) - f(n)| = |f(n) - g(n)|$, zodat, als $|f(n) - g(n)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$, dan ook $|g(n) - f(n)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq N$.

      iii. *Transitief* ($f \sim g$ en $g \sim h \overset{?}{\to} f \sim h$): kies $\varepsilon > 0$.
      Omdat $f \sim g$ bestaat een $N_1 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall_{n\geq N_1} |f(n) - g(n)| < \varepsilon/2$.
      Omdat $g \sim h$ bestaat een $N_2 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall_{n\geq N_2} |g(n) - h(n)| < \varepsilon/2$.
      Gebruik nu de driehoeksongelijkheid $|a + b| \leq |a| + |b|$ in de vorm

      $$|f(n)-h(n)| = |f(n)-g(n)+g(n)-h(n)) \leq |f(n)-g(n)|+|g(n)-h(n)|.$$

      Neem $N = \max\{N_1, N_2\}$, zodat $N \leq N_1$ en $N \geq N_2$, dan geldt $\forall_{n\geq N}$,

      $$|f(n) - h(n)| \leq |f(n) - g(n)| + |g(n) - h(n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

   Hieruit volgt dat $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq N} |f(n) - h(n)| < \varepsilon$. Dus per definitie $f \sim h$.

   (b) Geef een injectie $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_C$.

   Voor $q \in \mathbb{Q}$ neem je de rij $f_q(n) = q$ voor alle n. Dit is een Cauchy-rij in $\mathbb{Q}$: omdat $|f(n) - f(m)| = |q - q| = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, kun je in Definitie 5.9.3 het getal N willekeurig kiezen. De gezochte functie is $q \mapsto [f_q]$. Dit is een injectie: stel $[f_p] = [f_q]$, oftewel $f_p \sim f_q$, oftewel $\lim_{n\to\infty}(f_p(n) - f_q(n)) = 0$, oftewel $\lim_{n\to\infty}(p - q) = 0$. De functie $n \mapsto p - q$ hangt niet van n af, zodat $\lim_{n\to\infty}(p - q) = 0$ desda $p = q$. Daarmee is bewezen dat $[f_p] = [f_q] \to p = q$.

   (c) Laat zien dat optelling in $\mathbb{R}_C$, opgeschreven als $[f] + [g] := [f + g]$, ook daadwerkelijk goed gedefinieerd is: met andere woorden, dat als $f_1 \sim f_2$ en $g_1 \sim g_2$, dan geldt $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ en dus $[f_1 + g_1] = [f_2 + g_2]$. Hierbij is de functie $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ gedefinieerd door $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$.

   Dit gaat hetzelfde als (iii) in (a) boven, nu met de driehoeksongelijkheid

   $$|(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)| = |(f_1 - f_2) + (g_1 - g_2)| \leq |f_1 - f_2| + |g_1 - g_2|.$$

   Kies $\varepsilon > 0$. Omdat $f_1 \sim f_2$ is er een $N_1 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall_{n\geq N_1} |f_1(n) - f_2(n)| < \varepsilon/2$. Omdat $g_1 \sim g_2$ is er een $N_2 \in \mathbb{N}$ zodat $\forall_{n\geq N_2} |g_1(n) - g_2(n)| < \varepsilon/2$. In de verificatie van $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ neem je dan opnieuw $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Bonusopgave: (voor **0,5 bonuspunt**): Bewijs de *Paradox van Zermelo*: een verzameling die *elk* van zijn deelverzamelingen tevens als element bevat, kan (in **ZF**) niet bestaan. *Toelichting:* $V = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ heeft als *deelverzameling* $\{1, 2\}$, maar ook als *element*.

Bewijs uit het ongerijmde. Stel Z is zo'n verzameling, zodat $\forall_{x \in P(Z)} x \in Z$. Bekijk nu

$$\mathcal{R} = \{x \in P(Z) \mid x \notin x\}.$$

Uit de gegeven eigenschap $\forall_{x \in P(Z)} x \in Z$ volgt $\mathcal{R} \subset Z$. We vragen ons nu af of $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$.

- Als $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, dan is $\mathcal{R}$ één van de $x \in P(Z)$ in de definitie van $\mathcal{R}$. Maar dan geldt per definitie van $\mathcal{R}$ dat $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$: want $x \notin x$ voor alle $x \in \mathcal{R}$, en $\mathcal{R}$ is zelf zo'n x.
- Als $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, dan is $\mathcal{R}$ *niet* één van de $x \subset Z$ in de definitie van $\mathcal{R}$. Maar dan geldt *niet* $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ en dus $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$. Tegenspraak!

  Toelichting: dit is een variant van de Paradox van Russell. De hele redenering is nu echter correct in de verzamelingenleer. Bij Russell gaat het om de wilde uitdrukking $\mathsf{R} = \{x \mid x \notin x\}$, waarbij geen enkele beperking op x wordt gelegd. Bij $\mathcal{R}$ gaat het slechts om verzamelingen x die zijn beperkt doordat ze in $P(Z)$ liggen. Er is dan ook geen sprake van een echte paradox: is een bewijs dat iedere verzameling Z minstens één deelverzameling heeft die geen element van Z is.