Uitwerking Tentamen Inl. Wiskunde 30-10-18

1 a) $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

Bewijs:

$\neg(\alpha\vee\beta) \quad [\alpha]$	aanname [α]
$\neg(\alpha\vee\beta) \quad \alpha\vee\beta$	regel 9 (∨-I)
$\bot$	regel 4
$\neg(\alpha\vee\beta) \quad \alpha\to\bot$	regel 3 opheffing [α]
$\neg(\alpha\vee\beta) \quad \neg\alpha \quad [\beta]$	regel 5 en aanname [β]
$\neg(\alpha\vee\beta) \quad \alpha\vee\beta$	regel 9
$\bot$	regel 4
$\neg\beta \qquad \neg\alpha$	regel 1
$\neg\beta \wedge \neg\alpha$	regel 7

β: zelfde als voor ¬α

Ook correct: begin met aanname $[\neg(\alpha\vee\beta)]$ en eindig met regel 3: $\neg(\alpha\vee\beta) \to (\neg\beta \wedge \neg\alpha)$.

1b $\models \neg(\alpha\vee\beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Alleen NIET waar als $v(\neg(\alpha\vee\beta)) = 1$ (1)

$v(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = 0$ (2)

α	β	α∨β	¬(α∨β)	¬α∧¬β
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

dus combinatie (1) en (2) komt niet voor

Q.E.D.

2) T.b. $(A \cup B) \subset C$ desda $A \subset C$ en $B \subset C$

$\iff \forall_x (x \in A \cup B \to x \in C) \longleftrightarrow \big(\forall_y (y \in A \to y \in C) \land \forall_z (y \in B \to y \in C) \big)$

regel J

$\iff$ " " " $\longleftrightarrow \forall_x \big((x \in A \to x \in C) \land (x \in B \to x \in C) \big)$

regel L

$\iff \forall_x \Big(x \in A \cup B \to x \in C \longleftrightarrow (x \in A \to x \in C) \land (x \in B \to x \in C) \Big)$

regel 11

$\iff$ zelfde zonder $\forall x$.

$\alpha := x \in A$, $\beta := x \in B$, $\gamma := x \in C$

$\iff$ te bewijzen uitspraak is equivalent met:

$\big((\alpha \lor \beta) \to \gamma \big) \longleftrightarrow \big((\alpha \to \gamma) \land (\beta \to \gamma) \big)$

Dit is de tautologie rechts in (2.45) dus waar QED

---

3) $R \subset A \times A$ is p.o. op A, $B \subset A$, bewijs dat $R \cap B \times B$ een p.o. op B is. Noem deze R_B

1) R_B is reflexief, $x R_B x$ $\forall x \in B$: T.b. $\langle x, x \rangle \in R_B \Rightarrow$

$\forall_{x \in B}$ $\langle x, x \rangle \in R$ en $\langle x, x \rangle \in B \times B$.

eerste is waar omdat ook $x \in A$ en R is reflexief (op A)

tweede is waar per def. van Cartesisch product.

2) R_B is transitief:

$\langle x,y\rangle \in R_B$ en $\langle y,z\rangle \in R_B \rightarrow \langle x,z\rangle \in R_B$

dus $\langle x,y\rangle \in R$ en $\langle y,z\rangle \in R$ $\longrightarrow$ $\langle x,z\rangle \in R$

$\langle x,y\rangle \in B\times B$ $\langle y,z\rangle \in B\times B$ en $\langle x,z\rangle \in B\times B$

bovenste vgl volgt omdat R transitief is op A

onderste vgl volgt omdat $x\in B, y\in B, z\in B \rightarrow \langle x,z\rangle \in B\times B$

opnieuw per def. van Cartesisch product.

3) R_B is antisymmetrisch:

$\langle x,y\rangle \in R_B$ en $\langle y,x\rangle \in R_B \implies x=y$.

$\langle x,y\rangle \in R$ en $\langle y,x\rangle \in R \implies x=y$

en

$\langle x,y\rangle \in B\times B$ $\langle y,x\rangle \in B\times B$

eerste vgl omdat R antisymmetrisch is op A
tweede vgl in dit geval niet eens nodig
(alleen de implicatie $x\in B \rightarrow x\in A$).

4) $f: A\rightarrow B$, $g: B\rightarrow C$

(a) f, g injectief $\Rightarrow g\circ f$ injectief.

te bewijzen: $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \implies x_1 = x_2$, $\forall x_1,x_2\in A$.

g is injectief $\Rightarrow (g(y_1) = g(y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$.

Pas toe met $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2) \implies f(x_1) = f(x_2)$.

f is injectief $\implies x_1 = x_2$ Q.E.D.

4

(b) t.b. f, g surjectief $\Rightarrow g \circ f$ surjectief.
t.b. $\forall z \in C \ \exists x \in A$ met $g(f(x)) = z$.
g surjectief $\Rightarrow \exists y \in B$ met $z = g(y)$.
f surjectief $\Rightarrow \exists x \in A$ met $y = f(x) \Rightarrow z = g(f(x))$
QED

5 $\leq$ tot. orde op X, Bew $\forall \ \emptyset \neq S \subset X$
S heeft kleinste element.

Inductie op # elementen van S. $S \neq \emptyset$ dus
begin met $n=1$. als $S = \{x\}$ dan is
x een kleinste element van S (per definitie).

Inductiehypothese $\varphi(n)$: iedere verz. $S \subset X$ met
n elementen heeft kleinste element.

Basis: $\varphi(1)$ is waar net bewezen.

Inductiestap: Stel $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$
Volgens inductiehypothese heeft $\{x_1, \ldots, x_n\}$ een kleinste
element, zeg x_i met i een van 1 t/m n.

Omdat $\leq$ een totale ordening is zijn er 2 mogelijkheden:

1) $x_i \leq x_{n+1}$ in welk geval x_i ook van S minimaal is
2) $x_{n+1} \leq x_i$ in welk geval x_{n+1} minimaal van S is:
want $x_i \leq x_k \ \forall k = 1..n$ dus $x_{n+1} \leq x_i \leq x_k \Rightarrow$
$x_{n+1} \leq x_k \ \forall k$.

S heeft dus een minimaal element, daarmee is ook $\forall_{n\geq 1}\ (\varphi(n) \to \varphi(n+1))$ bewezen.
met $\varphi(1)$ geeft dit $\forall_{n\geq 1}\ \varphi(n)$ dus Q.E.D.

(6) $A \times B = \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists_{p\in A^+} \exists_{q\in B^+} (r = pq)\}$
met $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$, $B \geq 0$

(a) $A \times B \in \mathbb{R}$. We gaan de 4 eisen (5.56) – (5.58) na.

1) $A \times B \neq \emptyset$ duidelijk want $\mathbb{Q}^- \subset A \times B$

2) $A \times B \neq \mathbb{Q}$: net als in vorige proeftentamen,
A en B hebben bovengrenzen q_A, q_B en alle
$r > q_A \cdot q_B$ zitten niet in $A \times B$

3) $\forall_{q\in A\times B} \forall_{p\in\mathbb{Q}} (p < q \to p \in A \times B)$
voor $p \in \mathbb{Q}^-$ is dit duidelijk want $\mathbb{Q}^- \subset A \times B$.
als $0 \leq p < q = p' \cdot q'$ met $p' \in A^+, q' \in B^+$
$\Rightarrow r' := p'q' - p > 0$ en $r' \in \mathbb{Q}$ (want $p' \cdot q' \in \mathbb{Q}$)
$\Rightarrow p = p'(q' - \frac{r'}{p'})$ (N.B. $p > 0 \Rightarrow p' \neq 0$)
dan is $p' \in A$ en $q' - \frac{r'}{p'} \in B$ (want B voldoet aan (5.57))
$\Rightarrow p \in A \times B$ QED.

4) $\forall_{p\in A\times B} \exists_{q\in A\times B} (p < q)$

Volgt uit dezelfde eig. voor A en B:

$\forall p' \in A\ \exists r' \in A\quad p' < r' \quad , \forall q' \in B\ \exists s' \in B\ \ q' < s'$

$\Rightarrow r's' \in A \times B$ en $r's' > p = p'q'$, dus neem

$p := r's'$ voor gegeven $p = p'q'$. Q.E.D.

(b) $1 \times 1 = 1$: hier is $1 = A_1 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\}$

dus $A_1 \times A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \underline{\{r \in \mathbb{Q} \mid \exists_{0 \le p < 1} \exists_{0 \le q < 1} (r = pq)\}}$

Claim: 2e verz is $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 \le r < 1\}$ want

i) als $pq = r$ voor $0 \le p < 1$ en $0 \le q < 1$

dan $0 \le r < 1$ en omgekeerd: $\forall r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$\exists 0 \le p < 1, 0 \le q < 1$, met $r = p \cdot q$. Bewijs:

Neem $0 \le r < q < 1$ (deze $q \in \mathbb{Q}$ bestaat

want A_1 is Dedekind snede) en dan

$r = \frac{r}{q} \cdot q$, met $0 \le \frac{r}{q} < 1$ (want $0 \le r < q < 1$)

$= pq$ met $p = \frac{r}{q}$ $\Rightarrow$

$\{r \in \mathbb{Q} \mid \exists_{0 \le p < 1} \exists_{0 \le q < 1} (r = pq)\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid 0 \le r < 1\}$

$\Rightarrow A_1 \times A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid 0 \le r < 1\} = A_1$

$\Rightarrow 1 \times 1 = 1.$

(c) Weerlegging: neem producten van willekeurig kleine negatieve

getallen in A en B $\rightarrow r = pq$ willekeurig groot
p, q

$\Rightarrow A \times B$ zou hele $\mathbb{Q}$ zijn.