Herkansing Inleiding Wiskunde WP029 (vrijdag 24-01-2020, 08:30)

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) als je die gebruikt!

1. (a) Bewijs met behulp van waarheidstabellen dat: **1 punt**

$$\vDash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma.$$

Uit de waarheidstabel voor $\to$ volgt dat de enige mogelijkheid voor de waarde $v(((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma) = 0$ is: $v((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) = 1$ en $v(\gamma) = 0$. Die mogelijkheid moeten we dus uitsluiten. De eerste $= 1$ en de tabel voor $\wedge$ impliceren $v(\alpha \to \gamma) = 1$ en $v(\neg\alpha \to \gamma) = 1$. Als $v(\gamma) = 0$ dan volgt uit $v(\alpha \to \gamma) = 1$ en de waarheidstabel voor $\to$ dat $v(\alpha) = 0$. Maar uit $v(\gamma) = 0$ en $v(\neg\alpha \to \gamma) = 1$ volgt $v(\neg\alpha) = 0$, waaruit $v(\alpha) = 1$ via de tabel voor $\neg$. Tegenspraak, want zowel $v(\alpha) = 0$ als $v(\alpha) = 1$. Zo'n v bestaat dus niet, zodat $v(((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma) = 1$ voor alle v.

(b) Bewijs formeel vanuit regels 1 t/m 10 (dus zonder (a) en Stelling 1.4) : **1 punt**

$$\vdash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma.$$

Het volgende korte bewijs wordt (met de juiste uitleg onder) goedgerekend: de opzet is om van boven de streep $(\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)$ oftewel $\alpha \to \gamma$ en $\neg\alpha \to \gamma$ te komen tot onder de streep γ. Deze opzet kan zelf weer worden geformaliseerd, door in het onderstaande bewijs eerst $[(\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)]$ als aanname in te voeren, daaruit door twee keer $\wedge$-Eliminatie apart $\alpha \to \gamma$ en $\neg\alpha \to \gamma$ te concluderen, dan verder als onder, en na het bereiken van γ op de onderste regel te concluderen dat $((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma$ via $\to$-Introductie, waarbij de aanname $[(\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)]$ wordt opgeheven.

$$\begin{array}{c}
\alpha \to \gamma \quad \neg\alpha \to \gamma \quad [\neg\gamma] \\ \hline
\neg\alpha \\ \hline
\gamma \\ \hline
\perp \\ \hline
\gamma
\end{array}$$

Stap 1: Invoering aanname $[\neg\gamma]$.
Stap 2: Modus tollens op $[\neg\gamma]$ en $\alpha \to \gamma$ geeft $\neg\alpha$.
Stap 3: Modus ponens op $\neg\alpha$ en $\neg\alpha \to \gamma$ geeft γ. Het bewijs is hier nog niet klaar omdat de aanname $[\neg\gamma]$ nog moet worden opgeheven.
Stap 4: $\neg$-Eliminatie, of: $\neg\gamma \equiv \gamma \to \perp$ en Modus ponens op $\gamma \to \perp$ en γ.
Stap 5: RAA op aanname $[\neg\gamma]$, die nu pas mag worden opgeheven.

2. Schrijf voor $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$, en $C = \{1, 5\}$ op de verzamelingen: **1 punt**

$$A \cup B, \quad A \cap C, \quad B \cap C, \quad (A \cup B) \cap C, \quad (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad A \backslash B, \quad P(B), \quad A^+.$$

3. Bewijs (informeel maar compleet en met duidelijke verwijzing naar alle gebruikte bewijsregels) dat voor alle verzamelingen A, B, en C geldt: **2 punt**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

4. Neem voor een niet-lege verzameling Z de machtsverzameling $X = P(Z)$, met partiële ordening $\leq$ gegeven door $x \leq y$ desda $x \subset y$ (met $x \subset Z$ en $y \subset Z$).

   Laat zien dat voor willekeurige $x \in X$ en $y \in X$ de verzameling $S = \{x, y\} \subset X$ zowel een kleinste bovengrens als een grootste ondergrens heeft, namelijk resp.

unten

$$\bigvee\{x,y\} = x \cup y;$$
$$\bigwedge\{x,y\} = x \cap y.$$

5. Stel $A \neq \emptyset$ is een *eindige* verzameling. Bewijs (verplicht) met inductie naar het aantal elementen van A dat voor iedere surjectie $f : A \to B$ een functie $s : B \to A$ bestaat zodat $f \circ s = \mathrm{id}_B$, oftewel $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$.

unt

   De te bewijzen uitspraak $\varphi(n)$ is: voor iedere verzameling A met n elementen ($|A| = n$) en iedere surjectie $f : A \to B$ bestaat een functie $s : B \to A$ zodat $f \circ s = \mathrm{id}_B$. We nemen aan dat B niet leeg is (omdat er geen functie $f : A \to \emptyset$ bestaat is de claim logisch gesproken ook waar voor $B = \emptyset$).

   - *Basis*: we beginnen het bewijs door inductie met $n = 1$ en bewijzen $\varphi(1)$. Als $|A| = 1$ dan moet ook $|B| = 1$, anders kan f geen surjectie zijn, dus $A = \{x\}$ en $B = \{y\}$, zodat $f(x) = y$. Kies nu $s(y) = x$, dan volgt $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$, waarmee $\varphi(1)$ is bewezen.
   - *Inductiestap*: Stel $|A| = n + 1$ en kies $x_0 \in A$, met $A' := A - \{x_0\}$. Dan is $|A'| = n$. Beperk $f : A \to B$ tot $A' \subset A$, dit geeft $f' : A' \to B$ met $f'(x) = f(x)$ for alle $x \in A'$. Nu zijn er twee mogelijkheden:
     (a) f' is surjectief. Dan is er volgens de inductiehypothese $\varphi(n)$ een functie $s' : B \to A'$ met $f(s'(y)) = y$ voor alle $y \in B$. Omdat $A' \subset A$, kunnen we nemen $s = s'$, en deze functie $s : B \to A$ voldoet net als s' aan $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$.
     (b) f' is niet surjectief. Omdat f per aanname surjectief is, moet gelden dat $B = B' \cup \{f(x_0)\}$, met $B' = f(A')$. Noem de beperking van $f : A \to B$ tot A' opnieuw f', dan is $f' : A' \to B'$ surjectief en bestaat volgens de inductiehypothese $\varphi(n)$ een functie $s' : B' \to A'$ met $f(s'(y)) = y$ voor alle $y \in B'$. Definieer nu $s : B \to A$ als $s(y) = s'(y)$ voor alle $y \in B'$ en $s(f(x_0)) = x_0$. Dan geldt $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$: voor alle $y \in B'$ is dat waar wegens de inductiehypothese en voor $y = f(x_0)$ is het waar omdat $f(s(f(x_0))) = f(x_0)$. Hiermee is ook de inductiestap $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ bewezen.

     Uit $\varphi(1)$ en $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ voor alle n volgt met het principe van inductie dat $\varphi(n)$ voor alle $n \geq 1$ en daarmee is de claim bewezen.

6. Bewijs dat de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ overaftelbaar is.
   Hint: bewijs met een diagonaalargument dat er geen bijectie $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}$ kan bestaan.

unt

   Stel er is een bijectie $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en schrijf $f_n := b(n)$. Bekijk de functie $g(n) = f_n(n) + 1$. Omdat b surjectief is bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $g = f_m$, dus $g(n) =$

$f_m(n)$ voor alle n, dus ook voor $n = m$. Dus $g(m) = f_m(m)$. Dat is $f_m(m) + 1 = f_m(m)$ dus $1 = 0$. Tegenspraak en b kan dus niet bestaan

Veel succes!