

10

①

Uitwerking tt Int. Wiskunde 5-11-2021

1a) $\models (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Volg uit de waarheidstabellen:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$	$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Dus $v((\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)) = 1$

voor alle $v(A)$ en $v(B)$.

b) $\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Bewijs:

$[\neg A \vee B]$	$[A]$	aannamen
$\neg A \vee B$	$\neg \neg A$	r. 1 en Voorbeeld 1 p. 23
B		regel E
$A \rightarrow B$		regel $\rightarrow$, $[A]$
$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$		regel $\rightarrow$, $[\neg A \vee B]$

Uiteraard zijn andere bewijzen mogelijk!

(2)

2 (a) Bewijs dat $R \cup S \subset (X \cup Y) \times (X \cup Y)$
 gegeven dat $R \subset X \times X$ en $S \subset Y \times Y$.

Dus (betekenis $\subset$) te bewijzen $\forall z (z \in R \cup S \rightarrow z \in (X \cup Y) \times (X \cup Y))$

$\Leftrightarrow \forall z (z \in R \vee z \in S \rightarrow z \in (X \cup Y) \times (X \cup Y))$.

1) $z \in R \Rightarrow z = \langle x_1, x_2 \rangle$ met $x_1 \in X$ en $x_2 \in X$

maar $X \subset X \cup Y$ dus $x_1 \in X \cup Y$ en $x_2 \in X \cup Y \Rightarrow$

$\langle x_1, x_2 \rangle \in (X \cup Y) \times (X \cup Y)$ uit betekenis notatie, (3.2).

2) $z \in S \Rightarrow z = \langle y_1, y_2 \rangle$ met $y_1 \in Y$ en $y_2 \in Y$

maar $Y \subset X \cup Y$ dus $y_1 \in X \cup Y$, $y_2 \in X \cup Y \Rightarrow$ zelfde o

(b) Bewijs $R \cup S$ is $\sim$ op $X \cup Y$.

(1) reflexief: $\langle w, w \rangle \stackrel{?}{\in} R \cup S \quad \forall w \in X \cup Y$

Zieken: als $w = x \in X$ dan $\langle x, x \rangle \in R$ (want R is $\sim$)

en $R \subset R \cup S$ dus $\langle w, w \rangle \in R \subset R \cup S \Rightarrow \langle w, w \rangle \in R \cup S$

als $w = y \in Y$ dan $\langle y, y \rangle \in S \subset R \cup S \Rightarrow \langle w, w \rangle \in R \cup S$

(2) transitief: $\langle w_1, w_2 \rangle \in R \cup S$ en $\langle w_2, w_3 \rangle \in R \cup S$

$\stackrel{?}{\Rightarrow} \langle w_1, w_3 \rangle \in R \cup S$. Zelfde verhaal: als $w_1 = x_1 \in X$

dan $\langle w_1, w_2 \rangle \in R$ (want $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow w_2 \in X$)

$\Rightarrow \langle w_2, w_3 \rangle \in R$ en dus $\langle w_1, w_3 \rangle \in R \subset R \cup S$

Want R is transitief. Analog als $w_1 \in Y$.

(3)

als $X \cap Y \neq \emptyset$ kan het gebeuren dat $\langle w_1, w_2 \rangle \in R$
 en $\langle w_2, w_3 \rangle \in S$ (voor zekere $w_2 \in X \cap Y$) en dan
 volgt niet dat $\langle w_1, w_3 \rangle \in R \cup S$. als $X \cap Y \neq \emptyset$
 faalt dus mogelijk transitiviteit.

(3) symmetrie $\langle w_1, w_2 \rangle \in R \cup S$: als $w_1 \in X$ dan $w_2 \in X$
 en $\langle w_1, w_2 \rangle \in R \Rightarrow \langle w_2, w_1 \rangle \in R$ want R is symmetrisch
 $\Rightarrow \langle w_2, w_1 \rangle \in R \subseteq R \cup S \Rightarrow \langle w_2, w_1 \rangle \in R \cup S$.
 Analogie als $w_1 \in Y$.

(c) $\wedge [x]_{R \cup S} = \{ z \in X \cup Y \mid z \overset{R \cup S}{\sim} x \}$ (3-20)

als $x \in X$:

$$= \{ z \in X \mid z \overset{R}{\sim} x \} = [x]_R \text{ want}$$

$x \in z$ en $z \in Y$ geeft niet $x \overset{R \cup S}{\sim} z$ omdat $X \cap Y = \emptyset$ en
 dus ook $R \cap S = \emptyset$. Analogie.

$$y \in Y: [y]_{R \cup S} = \{ z \in X \cup Y \mid z \overset{R \cup S}{\sim} y \} = \{ z \in Y \mid z \overset{S}{\sim} y \} = [y]_S$$

(d) $(X \cup Y) / (R \cup S)$ heeft als elementen $[z]_{R \cup S}$, volgens (c)

is dat ofwel $[z]_R$ met $z \in X$ of $[z]_S$ met $z \in Y$

$\Rightarrow (X \cup Y) / (R \cup S) = (X/R) \cup (Y/S)$: de elementen
 $[z]_R$ met $z \in X$ komen immers X/R , etc.

(3) (a) $Z^W = \{ \text{alle functies } f: W \rightarrow Z \}$

$$= \{ G \in P(W \times Z) \mid \forall x \in W \exists! y \in Z \langle x, y \rangle \in G \}$$

1) Volgens Definitie 3.1 is, voor gegeven vert. Z en W , ook $W \times Z$ een verzameling.

2) Volgens $ZF6$ is dan ook $P(W \times Z)$ een verzameling.

3) Volgens $ZF2$ is dan ook Z^W een verzameling: neem in $ZF7$ w.t. $X = P(W \times Z)$, $Z := G$, en $F(Z) = F(G)$ de formule $\forall x \in W \exists! y \in Z \langle x, y \rangle \in G$.

(b). Functie van $X \times Y \rightarrow X \times Y$

$$F: f \mapsto \langle f(0), f(1) \rangle$$

heeft inverse $G: X \times Y \xrightarrow{G} X \times Y$

$$G: \langle x, y \rangle \mapsto \text{de functie } f: \{0, 1\} \rightarrow X \cup Y \text{ met } f(0) = x \text{ en } f(1) = y.$$

Dit is welgedefinieerd want $x \in X$ en $y \in Y$ (per def. van $\langle x, y \rangle$).

Dat de tweede functie de inverse van de eerste is evident:

$$F \circ G(\langle x, y \rangle) = \langle f(0), f(1) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$G \circ F(f) = G(\langle f(0), f(1) \rangle) = f$$

Daarom is F een bijection.

4.(a) Een bewijs in 2 regels heeft als enige mogelijke vorm

$$\frac{A_1 \dots A_k}{A} \quad \text{met } A_i \in T \quad \forall i=1, \dots, k.$$

Hierbij kunnen bewijsregels 2 en 4 niet zijn gebruikt, want anders was het bewijs langer geweest.

Opgave 1.13 bewijst precies dat met de andere regels volgt:

$$v(A_1) = \dots = v(A_k) = 1 \Rightarrow v(A) = 1$$

Dit is precies de betekenis van $T \models A$.

(b) Als het bewijs $n+1$ regels heeft ziet het eruit als

$$\frac{\frac{A_1 \dots A_k}{B_1 \dots B_\ell}}{A}$$

waarbij $B_1, \dots, B_\ell$ uit $A_1, \dots, A_k$ volgen.

Als regels 2 & 4 niet gebruikt zijn zijn volgens de inductiehypothese alle B_j waar als alle A_j dat zijn.

Daarom passen we opnieuw $F(z)$ toe op het deel $\frac{B_1 \dots B_\ell}{A}$ en is A dus waar.

Als 2 en 4 niet gebruikt zijn kunnen eerst 2 vervangen door 6 en opgave 1.13 uitbreiden.

$$\frac{\neg \neg A}{A} \text{ gebruikt}$$

waarheid volgt waarheidstabel van T : $v(\neg \neg A) = v(A)$

Dus alleen regel 4 is een apart geval.

Als regel 4 ergens is gebruikt om tot A te komen

moet gelden $A := B \rightarrow C$ en heeft het bewijs
de vorm

$$\frac{\begin{array}{c} A_1 \dots A_k [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{B \rightarrow C}$$

regel 4, $[B]$.

- als $v(B) = 0$ geldt altijd $v(B \rightarrow C) = v(A) = 1$
- als $v(B) = 1$ geldt $v(B \rightarrow C) = 0$ alleen als

$\boxed{v(C) = 0}$. Echter het bewijs van C uit $A_1, \dots, A_k, B$
is korter dan $n+1$ regels en volgens $F(n)$ geldt dus

$\boxed{v(C) = 1}$. Dus $v(B \rightarrow C) = 0$ is onmogelijk $\rightarrow$

$$v(B \rightarrow C) = v(A) = 1, \text{ zowel voor } v(B) = 0 \text{ als } v(B) = 1.$$

Ook met regel 4 volgt dus altijd $T \models A$.

Q.E.D.

5 Def De Dehn sneede $\{Q, R\}$ is partiële van $\mathbb{Q}$ met eigenschappen.

$$(1) \quad \forall p \in Q \quad \forall q \in R \quad (p < q) \quad \neg \exists p \in Q \quad \forall q \in Q \quad (q \leq p). \quad (2)$$

(a) Een $\{Q, R\}$ D-sneede $\Rightarrow Q$ is D-ondoorsneede:

(i) $Q \neq \emptyset$ en $Q \neq \mathbb{Q}$ omdat $\{Q, R\}$ een partiële is,
zie Def. 3.8.

(ii) Q doorsneede aan (5.67) = (2) boven volgt uit (2) en
logische eigenschap $\neg \exists x \neg F(x) \leftrightarrow \forall x F(x)$ en $\neg \forall x \neg F(x) \leftrightarrow \exists x F(x)$:

$$\neg \exists p \in Q \neg \forall q \in Q (q \leq p) \leftrightarrow \forall p \in Q \exists q \in Q (q \leq p) \quad \text{en} \quad \neg (q \leq p) \leftrightarrow p < q$$

(iii) Voldoen aan (5.66), $\forall p \in \mathbb{Q} \forall q \in \mathbb{Q} (p < q \rightarrow p \in \mathbb{Q})$ (7)
 RAA. Stel niet, stel dus $\exists p \in \mathbb{Q} \exists q \in \mathbb{Q} p > q$ $p \in \mathbb{Q}$:

Schiedt (1): $\forall p \in \mathbb{Q} \forall q \notin \mathbb{Q} (p < q) \leftrightarrow \forall p \in \mathbb{Q} \forall q \in \mathbb{Q} (p < q)$.
 min $R = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ dus $q \in R \text{ in (1)} \leftrightarrow q \notin \mathbb{Q}$.

(b) Bijsp $\mathbb{Q}$ is $\mathbb{D}$ -onderdeel $\Rightarrow \{\mathbb{Q}, R\}$ is $\mathbb{D}$ -sede.
 met $R = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$

(c) $\{\mathbb{Q}, R\}$ is partiël: $\mathbb{Q} \neq \emptyset$ en $\mathbb{Q} \neq \emptyset$ is gezien als deel
 van $\mathbb{D}$ -onderdeel $\Rightarrow R \neq \emptyset$ en $R \neq \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q} \cup R = \mathbb{Q}$ want $R = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q} \cap R = \emptyset$ identiek.

(ii) eig (2) volgt uit (5.67) als inderdaad bijsp.

Eig (1) volgt (bijvoorbeeld) via RAA:

stel $\exists p \in \mathbb{Q} \exists q \notin \mathbb{Q} (p > q)$ zelfs zelfde
 contradictie als in deel (a) van het bijsp, d.w.z.

met $\forall p \in \mathbb{Q} \forall q \in \mathbb{Q} (p < q \rightarrow p \in \mathbb{Q})$

Hierna is het bijsp (en tevens het tentamen) valide.

Dank u voor dit mooie college Professor Vlas!