Tentamen Inleiding Meetkunde
14 januari 2022, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, zie ook de achterkant van dit tentamenvel.
- Je kunt maximaal 32 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/32 + 1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Veel succes!

Opgave 1. Beschouw de punten $P = [1 : 1 : -1]$ en $Q = [2 : 2 : 1]$ in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

(a) [3 punten] Vind $a, b, c \in \mathbb{R}$ zo dat de lijn L in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door deze twee punten gelijk is aan

$$\{[x : y : z]; ax + by + cz = 0\}.$$

(b) [3 punten] Laat zien dat het punt $R = [4 : 4 : -1]$ op L ligt. Vind vectoren $p, q \in \mathbb{R}^3$ zo dat $P = [p]$, $Q = [q]$ en $R = [p + q]$.

Beschouw de bijectie $f : \mathbb{E}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ gegeven door

$$f(x, y) = [x : y : 1]$$
$$f(P_\infty) = [x : y : 0]$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, waarbij P_∞ het punt op oneindig is van de lijn door de oorsprong en $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) [4 punten] Bepaal het beeld van L onder f^{-1}.

Opgave 2. Stel dat l_1, l_2, l_3, l_4 verschillende lijnen zijn in een abstract projectief vlak. Stel dat l_1, l_2 en l_3 elkaar in één punt P snijden. Zij A_j het snijpunt van l_4 met l_j, for $j = 1, 2, 3$. Stel dat $A_1 \neq P$.

(a) [4 punten] Bewijs dat de punten P, A_1, A_2 en A_3 verschillend zijn.

(b) [3 punten] Bewijs dat de lijnen l_1, l_2 en l_3 samen minstens 7 punten bevatten.

Opgave 3. (a) [2 punten] Beschouw de punten

$$P_1 = [1 : 0]$$
$$P_2 = [0 : 1]$$
$$P_3 = [1 : 1]$$

in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Bereken de dubbelverhouding

$$[P_1, P_2; P_3, P_4]$$

voor een vierde punt $P_4 = [x_4 : y_4] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ ongelijk aan P_1, P_2, P_3. (Leg ook uit waarom de uitdrukking die je krijgt goed gedefinieerd is.)

(b) [2 punten] Zij $x \in \mathbb{R}$ ongelijk aan 0 of 1. Bewijs dat er punten $P_1, P_2, P_2, P_4 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ bestaan zo dat $[P_1, P_2; P_3, P_4] = x$.

(c) [4 punten] Bewijs dat een dubbelverhouding nooit gelijk aan 1 is.

Hint: gebruik een geschikte projectieve transformatie en onderdeel (a).

Opgave 4. Zij $a > 0$, en zij $f \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de Möbiustransformatie

$$f(z) = a/\bar{z}.$$

(a) [4 punten] Bewijs dat f een spiegeling in een lijn in het bovenhalfvlak is. Geef die lijn, en bewijs direct uit de definitie van spiegelingen in lijnen in $\mathbb{H}$ dat f inderdaad de spiegeling in die lijn is.

(b) [3 punten] Bewijs door een directe berekening dat f de niet-Euclidische afstand van punten op de positieve y-as behoudt.