Tentamen Inleiding Meetkunde
14 januari 2022, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, zie ook de achterkant van dit tentamenvel.
- Je kunt maximaal 32 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/32 + 1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Veel succes!

Opgave 1. Beschouw de punten $P = [1 : 1 : -1]$ en $Q = [2 : 2 : 1]$ in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

(a) [3 punten] Vind $a, b, c \in \mathbb{R}$ zo dat de lijn L in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door deze twee punten gelijk is aan

$$\{[x : y : z]; ax + by + cz = 0\}.$$

(b) [3 punten] Laat zien dat het punt $R = [4 : 4 : -1]$ op L ligt. Vind vectoren $p, q \in \mathbb{R}^3$ zo dat $P = [p]$, $Q = [q]$ en $R = [p + q]$.

Beschouw de bijectie $f\colon \mathbb{E}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ gegeven door

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [x : y : 1] \\ f(P_\infty) &= [x : y : 0] \end{aligned}$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, waarbij P_∞ het punt op oneindig is van de lijn door de oorsprong en $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) [4 punten] Bepaal het beeld van L onder f^{-1}.

Oplossing.

(a) Deze a, b, c moeten voldoen aan

$$\begin{aligned} a + b - c &= 0 \\ 2a + 2b + c &= 0. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen optellen geeft $3a + 3b = 0$, dus $b = -a$. Dan geeft de eerste vergelijking $c = 0$. Neem dus bv. $a = 1$, $b = -1$ en $c = 0$.

(b) R voldoet aan de vergelijking voor L. Neem $p = (2, 2, -2)$ en $q = (2, 2, 1)$.

(c) Er zijn twee opties: f^{-1} toepassen op de vergelijking voor L uit onderdeel (a), of op de punten P en Q en dan daar de lijn door nemen. We doen het tweede. We vinden

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= f^{-1}([-1:-1:1]) = (-1,-1); \\ f^{-1}(Q) &= (2,2). \end{aligned}$$

De lijn in $\mathbb{R}^2$ door deze twee punten is $l = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Dus $f^{-1}(L) = l^*$.

Opgave 2. Stel dat l_1, l_2, l_3, l_4 verschillende lijnen zijn in een abstract projectief vlak. Stel dat l_1, l_2 en l_3 elkaar in één punt P snijden. Zij A_j het snijpunt van l_4 met l_j, for $j = 1, 2, 3$. Stel dat $A_1 \neq P$.

(a) [4 punten] Bewijs dat de punten P, A_1, A_2 en A_3 verschillend zijn.

(b) [3 punten] Bewijs dat de lijnen l_1, l_2 en l_3 samen minstens 7 punten bevatten.

Oplossing.

(a) Als $P = A_j$, voor $j = 2, 3$, dan liggen de punten A_1 en P op zowel l_1 als l_4. En deze punten zijn verschillend, dus $l_1 = l_4$, een tegenspraak. Dus P is verschillend van A_1, A_2 en A_3. Als $A_j = A_k$ voor $j, k \in \{1, 2, 3\}$ verschillend, dan liggen de verschillende punten P en A_j op zowel l_j and l_k, een tegenspraak.

(b) Het is een axioma van projectieve vlakken dat elke lijn minstens drie punten bevat. Kies dus voor $j = 1, 2, 3$, B_j op l_j, ongelijk aan P en A_j. De punten B_j zijn ongelijk aan elkaar om dezelfde reden dat de punten A_j verschillend zijn.

Opgave 3. (a) [2 punten] Beschouw de punten

$$\begin{aligned} P_1 &= [1:0] \\ P_2 &= [0:1] \\ P_3 &= [1:1] \end{aligned}$$

in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Bereken de dubbelverhouding

$$[P_1, P_2; P_3, P_4]$$

voor een vierde punt $P_4 = [x_4 : y_4] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ ongelijk aan P_1, P_2, P_3. (Leg ook uit waarom de uitdrukking die je krijgt goed gedefinieerd is.)

(b) [2 punten] Zij $x \in \mathbb{R}$ ongelijk aan 0 of 1. Bewijs dat er punten $P_1, P_2, P_2, P_4 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ bestaan zo dat $[P_1, P_2; P_3, P_4] = x$.

(c) [4 punten] Bewijs dat een dubbelverhouding nooit gelijk aan 1 is.

Hint: gebruik een geschikte projectieve transformatie en onderdeel (a).

Oplossing.

(a) De uitkomst is x_4/y_4 als $y_4 \neq 0$. Als $y_4 = 0$, dan $P_4 = P_1$, een tegenspraak.

(b) Zij $x \in \mathbb{R}$ ongelijk aan 0 en 1. Definieer $P_4 = [x : 1]$. Vanwege de aanname is P_3 ongelijk aan de punten P_1, P_2, P_3 in onderdeel (a). En vanwege onderdeel (a) is

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = x.$$

(c) Stel dat $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ verschilllend zijn. Zij $f\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ de projectieve transformatie zo dat $f(Q_j) = P_j$ voor $j = 1, 2, 3$, met P_j als in onderdeel (a). Er geldt

$$[Q_1, Q_2; Q_3, Q_4] = [P_1, P_2; P_3, f(Q_4)]$$

omdat f de dubbelverhouding behoudt. Als $[Q_1, Q_2; Q_3, Q_4] = 1$, dan is vanwege onderdeel (a), $f(Q_4) = [1 : 1] = f(Q_3)$. Dat is in tegenspraak met injectiviteit van projectieve transformaties.

Opgave 4. Zij $a > 0$, en zij $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de Möbiustransformatie

$$f(z) = a/\bar{z}.$$

(a) [4 punten] Bewijs dat f een spiegeling in een lijn in het bovenhalfvlak is. Geef die lijn, en bewijs direct uit de definitie van spiegelingen in lijnen in $\mathbb{H}$ dat f inderdaad de spiegeling in die lijn is.

(b) [3 punten] Bewijs door een directe berekening dat f de niet-Euclidische afstand van punten op de positieve y-as behoudt.

Oplossing.

(a) We beweren dat f de spiegeling is in de lijn

$$\{z \in \mathbb{H} : |z| = \sqrt{a}\}. \tag{1}$$

Als namelijk $w \in \mathbb{H}$, dan liggen $w = re^{i\theta}$ en $f(w) = \frac{a}{r}e^{i\theta}$ op dezelfde lijn vanuit het middelpunt 0 van deze cirkel. Verder is

$$|w - 0||f(w) - 0| = a|w|/|\bar{w}| = a,$$

het kwadraat van de straal van de halve cirkel (1).

(Nu komt de lijn (1) wat uit de lucht vallen. Je kunt er ook achter komen welke lijn dat moet zijn door op te merken dat $f(z) = z$ voor z op de lijn waarin we spiegelen. Die vergelijking oplossing geeft $a = z\bar{z} = |z|^2$.)

(b) Als $y, y' > 0$, dan is

$$\rho(f(iy), f(iy')) = \rho(ia/y, ia/y') = |\log(y'/y)| = |\log(y/y')| = \rho(iy, iy').$$