Tentamen Inleiding Meetkunde
12 januari 2021, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd. (Tenzij expliciet anders vermeld, zoals bij opgave 4(b).)
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 31 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/31 + 1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Veel succes!

Opgave 1. (2+3+3 punten) Beschouw de punten

$$P = [1 : 1 : 2];$$
$$Q = [2 : 1 : 3]$$

in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Bewijs dat $P \neq Q$.

(b) Zij l de lijn in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ door P en Q. Vind $a, b, c \in \mathbb{R}$ zo dat de lijn l bestaat uit alle lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$ die bevat zijn in het vlak

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}.$$

(c) Beschouw de bijectie $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{E}(\mathbb{R}^2)$ gegeven door

$$f([x : y : z]) = \begin{cases} (x/z, y/z) & \text{als } z \neq 0; \\ P_\infty & \text{als } z = 0, \end{cases}$$

waarbij P_∞ het punt op oneindig is van de lijn in $\mathbb{R}^2$ door de oorsprong en (x, y). Geef een vergelijking voor $f(l) \cap \mathbb{R}^2$.

Opgave 2. (5 punten) In deze opgave werken we met een abstract projectief vlak. Laat A, B, C, D verschillende punten zijn in dat projectieve vlak. Laat P, Q punten zijn in het projectieve vlak zo dat

- het punt P zowel op de lijn door A en B als op de lijn door C en D ligt; en
- het punt Q zowel op de lijn door A en C als op de lijn door B en D ligt.

Bewijs dat als $P = Q$, dan liggen de punten A, B, C, D op één lijn. *Hint:* voor jezelf een plaatje tekenen kan helpen.

Opgave 3. (3+3+4+3 punten) Beschouw de punten

$$P_1 = [1 : 2], \quad P_2 = [-1 : 3], \quad P_3 = [-1 : 1] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2).$$

Zij $P_4 = [x_4 : y_4]$ een vierde punt in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Zij $f\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ een projectieve transformatie, zo dat

$$f(P_1) = [1 : 0], \quad f(P_2) = [0 : 1], \quad f(P_3) = [1 : 1], \quad f(P_4) = [1 : 2].$$

(a) Druk de dubbelverhouding $[P_1, P_2; P_3, P_4]$ uit in x_4 en y_4, en bereken de dubbelverhouding $[f(P_1), f(P_2); f(P_3), f(P_4)]$. *Hint:* de dubbelverhouding van vier verschillende punten $P_j = [x_j : y_j] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, voor $j = 1, 2, 3, 4$, is gedefinieerd als

$$[P_1, P_2; P_3, P_4] = \frac{(x_1y_3 - y_1x_3)(x_2y_4 - y_2x_4)}{(x_1y_4 - y_1x_4)(x_2y_3 - y_2x_3)}.$$

(b) Gebruik dubbelverhoudingen om P_4 te bepalen.

(c) Gebruik de punten P_1, P_2 en P_3, en hun beelden onder f, om te bewijzen dat er $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zijn zo dat voor alle $[x : y] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$,

$$f([x : y]) = [ax + by : cx + dy],$$

waarbij $ad - bc \neq 0$, en

$$\begin{aligned} c + 2d &= 0; \\ -a + 3b &= 0; \\ -a + b &= -c + d. \end{aligned}$$

Hint: dit onderdeel staat los van onderdelen (a) en (b).

(d) Gebruik onderdeel (c) om een expliciete uitdrukking te geven voor f.

Opgave 4. (2+3 punten) Beschouw de afbeelding f van het bovenhalfvlak $\mathbb{H}$ naar zichzelf, gegeven door

$$f(z) = \frac{1}{1 - z},$$

voor $z \in \mathbb{H}$.

(a) Bewijs dat f een Möbiustransformatie is.

(b) Schrijf f als een samenstelling van spiegelingen in (niet-Euclidische) lijnen in $\mathbb{H}$. Geef aan welke lijnen dit zijn, zonder dat te bewijzen. *Hint:* als één van die spiegelingen kun je de afbeelding $z \mapsto 1/\bar{z}$ nemen. In welke lijn is dit een spiegeling?