Tentamen Inleiding Wiskunde (NWI-WP029) 05-11-2021 08:30

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) als je die gebruikt!

1. Bekijk in propositielogica de uitspraak $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$.
   (a) *Laat zien dat deze uitspraak een tautologie is.* **1 punt**
   (b) *Geef een formeel bewijs van de uitspraak (zonder (a) en Stelling 1.6).* **1 punt**

2. Stel R en S zijn equivalentierelaties op respectievelijk X en Y, met $X \cap Y = \emptyset$.
   (a) Laat zien dat $(R \cup S) \subset (X \cup Y) \times (X \cup Y)$. **0,5 punt**
   (b) Bewijs dat $R \cup S$ een equivalentierelatie op $X \cup Y$ is. Geef aan waar je de aanname $X \cap Y = \emptyset$ gebruikt en welk deel van de definitie anders faalt. **0,5 punt**
   (c) Bewijs dat $[x]_{R\cup S} = [x]_R$ (voor alle $x \in X$) en $[y]_{R\cup S} = [y]_S$ (voor alle $y \in Y$).[1] **0,5 punt**
   (d) Bewijs dat $(X \cup Y)/(R \cup S) = (X/R) \cup (Y/S)$. **0,5 punt**

3. *Alternatieve constructie van het cartesisch product.* Notatie: voor alle verzamelingen W en Z is Z^W de verzameling van alle functies $f : W \to Z$.
   (a) *Laat zien dat Z^W volgens de ZF-axioma's inderdaad een verzameling is.* **1 punt**
   (b) Voor twee willekeurige verzamelingen X en Y definiëren we, met $\underline{2} = \{0, 1\}$,

$$X \tilde{\times} Y := \{f \in (X \cup Y)^{\underline{2}} \mid f(0) \in X, f(1) \in Y\}.$$

   Geef een bijectie tussen $X \tilde{\times} Y$ en $X \times Y$ (en bewijs dat het een bijectie is!). **1 punt**

4. Bewijs Gezondheid van de Propositielogica: *Als $T \vdash A$, dan $T \vDash A$* (Stelling 1.6). Gebruik inductie op de lengte van het bewijs van A, met inductiehypothese $F(n)$:
   Als A in n regels uit T bewezen kan worden, dan geldt $T \vDash A$ ($n \geq 2$).
   (a) *Bewijs de basisstap $F(2)$ van de inductie.* Hint: gebruik Opgave 1.13 (die je niet opnieuw hoeft te doen maar wel goed moet inzetten en uitleggen). **1 punt**
   (b) *Bewijs de inductiestap $F(n) \to F(n + 1)$, voor alle $n \geq 2$.*
   Doe dit eerst voor het geval dat bewijsregels 2 en 4 niet zijn gebruikt. **0,5 punt**
   Doe vervolgens het algemene geval. In plaats van regel 2 kun je de afgeleide bewijsregel G gebruiken. Ga voor regel 4 uit de waarheidstabel voor $\to$ na in welk geval $A \to B$ onwaar is en gebruik de inductiehypothese. **0,5 punt**

5. Een **Dedekind snede** is een partitie $\{Q, R\}$ van $\mathbb{Q}$ die tevens voldoet aan:[2]

$$\forall_{p\in Q} \forall_{q\in R}\, (p < q); \qquad \neg\exists_{p\in Q} \forall_{q\in Q}\, (q \leq p),$$

   oftewel: $Q < R$ en Q heeft geen grootste element. *Laat (door alle delen van beide definities na te gaan) zien dat Q een Dedekind ondersnede van $\mathbb{Q}$ is desda $\{Q, R\}$ met $R := \mathbb{Q} \setminus Q$ een Dedekind snede van $\mathbb{Q}$ is (1 punt voor iedere implicatie).* **2 punten**

Veel succes! **10 punten**

---

1. Hier is $[x]_{R\cup S}$ de equivalentieklasse van x, gezien als element van $X \cup Y$, ten opzichte van $R \cup S$, terwijl $[x]_R$ de equivalentieklasse van $x \in X$ en opzichte van R is. Analoog voor $[y]_{R\cup S}$ en $[y]_S$.
2. Oorspronkelijk definieerde Dedekind reële getallen als dergelijke sneden.