Tentamen Inleiding Wiskunde (NWI-WP029) 30-10 2020 08:30

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) die je gebruikt! Geef ook aan (met datum) welke versie van de syllabus je gebruikt (liefst die van 26-10).

1. Bekijk in propositielogica de uitspraak $((A \wedge \neg B) \to C) \to ((A \wedge \neg C) \to B)$.
   (a) *Laat zien dat deze uitspraak een tautologie is.* **1 punt**
   (b) *Geef een formeel bewijs van de uitspraak (zonder (a) en Stelling 1.4).* **1 punt**

2. (a) *Bewijs met de hoge precisie van het soort bewijzen in* §*2.3 dat* **1 punt**

$$\forall_x \forall_y \forall_z ((x \backslash y \subset z) \to (x \backslash z \subset y)).$$

   (b) *Bewijs hieruit dat voor alle concrete verzamelingen genaamd X, Y, Z geldt:* **1 punt**

$$(X \backslash Y \subset Z) \to (X \backslash Z \subset Y).$$

3. Stel dat een relatie $R \subset X \times X$ op een verzameling X symmetrisch en transitief is, en bovendien voldoet aan de eigenschap: $\forall_{x \in X} \exists_{y \in X} \langle x, y \rangle \in R$.
   Toon aan dat R een equivalentierelatie is. **1 punt**

4. Een rechts-inverse van een functie $f : X \to Y$ is een functie $s : Y \to X$ zodat $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ oftewel $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in Y$ (zo'n s hoeft niet te bestaan!).
   Bekijk een verzameling X met equivalentierelatie $\sim$. Het **keuzeaxioma** zegt:
   de canonieke projectie $p : X \to X/\sim$ (zie §*4.5) heeft een rechts-inverse.*
   Neem zo'n rechts-inverse $s : X/\sim \to X$ en bekijk het beeld $S := s(X/\sim) \subset X$.
   (a) *Laat voor iedere $x \in X$ zien dat $[x] \cap S$ precies één element heeft.* **1 punt**
   (b) *Laat zien dat $X/\sim \cong S$* (zodat $X/\sim \leqslant X$). **1 punt**

5. (a) *Bewijs (direct,* niet als speciaal geval van het binomium van Newton*) met inductie dat $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$* voor alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. **1 punt**
   (b) *Bewijs eveneens met inductie dat $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ voor alle $n \geq 1$.* **1 punt**

6. Optelling in de reële getallen $\mathbb{R}$ volgens Dedekind is gedefinieerd als

$$Q + Q' = \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists_{p \in Q} \exists_{q \in Q'}\, p + q = r\}.$$

   Toon aan dat de partiële ordening op $\mathbb{R}$ (d.w.z. $Q \leq R$ desda $Q \subset R$) voldoet aan: **1 punt**

   als $Q_1 \leq Q_2$, dan $Q_1 + Q_3 \leq Q_2 + Q_3$, voor alle Q_1, Q_2, Q_3 in $\mathbb{R} \subset P(\mathbb{Q})$.

Veel succes!