Tentamen Inleiding Wiskunde 2019 (30 oktober 2019, 08:30–11:30)

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) als je die gebruikt!

1. (a) Bewijs formeel $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. **1 punt**

   (b) Bewijs direct (zonder Stelling 1.4) dat $\models \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. **1 punt**

2. Bewijs (informeel opgeschreven maar met duidelijke verwijzing naar alle gebruikte bewijsregels) dat voor alle verzamelingen A, B, en C geldt: **2 punt**

$$(A \cup B) \subset C \text{ desda } A \subset C \text{ en } B \subset C.$$

3. Stel dat $R \subset A \times A$ een partiële ordening op een verzameling A is en dat $B \subset A$. Bewijs dat $R \cap (B \times B)$ een partiële ordening op B is. **1,5 punt**

4. Stel dat $f : A \to B$ en $g : B \to C$ functies zijn met A, B, C niet leeg.

   (a) Laat zien dat als f en g injectief zijn, ook $g \circ f$ injectief is. **0,5 punt**

   (b) Laat zien dat als f en g surjectief zijn, ook $g \circ f$ surjectief is. **0,5 punt**

5. Stel dat $\leq$ een totale ordening op een verzameling X is. We zeggen dat een deelverzameling $S \subset X$ een *kleinste element* $x_0 \in S$ heeft als voor iedere $y \in S$ geldt $x_0 \leq y$. Bewijs dat iedere *eindige* niet-lege deelverzameling $S \subset X$ een kleinste element heeft. *Hint*. Inductie op het aantal elementen van S. **1,5 punt**

6. Je kunt in $\mathbb{R}$ (Definitie 5.11 à la Dedekind) *vermenigvuldigen*. We zeggen dat $A \geq 0$ als $\mathbb{Q}^- \subset A$, met $\mathbb{Q}^- = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$. Voor $A \geq 0$ en $B \geq 0$ definiëren we

$$A \times B = \mathbb{Q}^- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists_{p \in A^+} \exists_{q \in B^+} (r = pq)\},$$

   waarin $A^+ = A \cap \mathbb{Q}^+$ met $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$, en analoog $B^+ = B \cap \mathbb{Q}^+$.

   (a) Laat zien dat als $A \in \mathbb{R}$ en $B \in \mathbb{R}$ (met $A \geq 0$ en $B \geq 0$), dan ook $A \times B \in \mathbb{R}$. **1 punt**

   (b) Laat zien dat op deze manier ook in $\mathbb{R}$ geldt: $1 \times 1 = 1$. **1 punt**

   (c) Waarom werkt de formule $A \times B = \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists_{p \in A} \exists_{q \in B} (r = pq)\}$ niet? **afronding**

   Vraag 6(c) kan eventueel helpen om je cijfer naar boven af te ronden.

Veel succes!