## Tentamen Inleiding Wiskunde 2018 (maandag 29-10-2018, 08:30)

*Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) als je die gebruikt!*

1. (a) Bewijs formeel $\vdash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma$. **0,5 punt**

   (b) Bewijs formeel $\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma))) \to \gamma$. **0,5 punt**

   (c) Bewijs direct (zonder Stelling 1.6) dat $\vDash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\neg\alpha \to \gamma)) \to \gamma$. **1 punt**

2. Stel $X$ is een niet-lege verzameling.

   (a) Wat is $\cup P(X)$? Bewijs je antwoord (niet formeel, maar wel heel precies!). **1 punt**

   (b) Wat is $\cap P(X)$? Bewijs je antwoord (*idem*). **1 punt**

3. (a) Stel $A \neq \emptyset$ is een *eindige* verzameling. Bewijs (bijv. met inductie naar het aantal elementen van $A$) dat voor iedere surjectie $f : A \to B$ een functie $s : B \to A$ bestaat zodat $f \circ s = \mathrm{id}_B$, oftewel $f(s(y)) = y$ voor alle $y \in B$. **1 punt**

   (b) Bewijs dat voor iedere *eindige* niet-lege verzameling $X$ een 'keuzefunctie'

   $$g : P(X)\backslash\{\emptyset\} \to X$$

   bestaat met $g(a) \in a$ voor alle niet-lege $a \subset X$. Hint: neem in onderdeel (a) **1 punt**

   $$A = \{\langle a, x\rangle \in (P(X)\backslash\{\emptyset\}) \times X \mid x \in a\};$$
   $$B = P(X)\backslash\{\emptyset\}.$$

4. Bewijs dat de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ overaftelbaar is.
   Hint: bewijs ofwel dat er geen bijectie $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}$ kan bestaan, ofwel dat $\mathbb{R} \leqslant \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. **1 punt**

5. Bewijs dat de volgende functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitief recursief zijn, dat wil zeggen: gedefinieerd kunnen worden volgens Stelling 6.5 (vind daarin dus $g$ en $h$):

   (a) $f(x) = y^x$ voor vaste $y \in \mathbb{N}$; **0,5 punt**

   (b) $f(0) = 0$ en $f(x) = x - 1$ voor alle $x > 0$. **0,5 punt**

6. De Cauchy-rijen in $\mathbb{Q}$ vormen een deelverzameling $CR(\mathbb{Q})$ van de verzameling $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ van alle functies $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ en vormen dus zelf een verzameling. We definiëren nu een relatie $\sim$ op $CR(\mathbb{Q})$ door: $f \sim g$ desda $\lim_{n\to\infty}(f_n - g_n) = 0$, oftewel: $f \sim g$ desda $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\, |f(n) - g(n)| < \varepsilon$. Cantor definieerde de reële getallen als $\mathbb{R}_C := CR(\mathbb{Q})/\sim$ (men kan bewijzen dat $\mathbb{R}_C \cong \mathbb{R}$ volgens Dedekind).

   (a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is. **1 punt**

   (b) Geef een injectie $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_C$. **0,5 punt**

   (c) Laat zien dat optelling in $\mathbb{R}_C$, opgeschreven als $[f] + [g] := [f + g]$, ook daadwerkelijk goed gedefinieerd is: met andere woorden, dat als $f_1 \sim f_2$ en $g_1 \sim g_2$, dan geldt $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$ en dus $[f_1 + g_1] = [f_2 + g_2]$. Hierbij is de functie $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ gedefinieerd door $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$. **0,5 punt**

*Bonusopgave:* (voor **0,5 bonuspunt**): Bewijs de *Paradox van Zermelo*: een verzameling die *elk* van zijn deelverzamelingen tevens als element bevat, kan (in **ZF**) niet bestaan.
*Toelichting:* $V = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ heeft als *deelverzameling* $\{1, 2\}$, maar ook als *element*.

*Veel succes!*