Tentamen Toegepaste Stochastiek

14 januari 2019, 8:30-11:30

- Er zijn 90 punten te verdienen. U krijgt er 10 gratis.
- Voorzie al uw antwoorden van een passende motivatie.

Opgave 1 (5 punten)

Het Ramsey getal $R(5,5)$ is niet bekend. We weten alleen dat $43 \leq R(5,5) \leq 48$. Leg uit waarom het zo moeilijk is om $R(5,5)$ te bepalen. Schraag uw antwoord met een berekening.

Uitwerking
Om te laten zien dat een getal k een bovengrens is, moet men alle manieren waarop de kanten van K_k gekleurd kunnen worden beschouwen. Voor een ondergrens moet men een kleuring vinden die voldoet. Het aantal mogelijke kleuringen is

$$2^{\binom{k}{2}} = 2^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

Als $k \geq 43$, dan is dit ook voor een supercomputer veel te groot.

Opgave 2 (12 punten)

Zij $\mathcal{F}$ een collectie deelverzamelingen van $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Neem aan dat elke $F \in \mathcal{F}$ precies 4 elementen heeft. Laat zien: als $|\mathcal{F}| \leq 7$, dan bestaat er een kleuring van $[n]$ in twee kleuren zodanig dat in elke $F \in \mathcal{F}$ beide kleuren voorkomen.

Uitwerking
Noem de kleuren rood en blauw. Neem een willekeurige kleuring van $\{1, 2, \ldots, n\}$, waarbij rood en blauw allebei kans $\frac{1}{2}$ hebben en de elementen onafhankelijk van elkaar gekleurd worden. De kans dat een gegeven F maar één kleur heeft is dan gelijk aan $\frac{1}{8}$. Zij X het aantal verzamelingen dat maar één kleur heeft. Dan geldt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{8} \cdot |\mathcal{F}| \leq \frac{7}{8} < 1.$$

Omdat X een geheeltallige niet-negatieve stochast is volgt hieruit dat X de waarde 0 kan aannemen, wat betekent dat er een kleuring van $[n]$ in twee kleuren bestaat zodanig dat in elke $F \in \mathcal{F}$ beide kleuren voorkomen.

Opgave 3 (10+5+15+10 punten)

Beschouw de Erdős-Renyi graaf $G_{n,p}$ met $p = \frac{c}{n}$ voor zekere constante $c > 0$. Zij X het aantal geïsoleerde knopen in deze graaf.

(a) Laat zien dat $\mathbb{E}[X] \sim e^{-c} \cdot n$.

(b) Wat zegt het Poisson paradigma? Laat zien dat dit paradigma in dit geval leidt tot het vermoeden dat de graaf asymptotisch bijna zeker geïsoleerde knopen heeft. U hoeft hier dus nog niks te bewijzen.

(c) Neem nu $c = 1$. Toon aan dat $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X)$.

(d) Neem weer $c = 1$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = 0) = 0$.

Uitwerking

(a) De kans dat een knoop v geïsoleerd is, is gelijk aan

$$\mathbb{P}(\deg(v) = 0) = (1-p)^{n-1}.$$

Derhalve

$$\mathbb{E}[X] = n(1-p)^{n-1}.$$

Er geldt dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[X]}{e^{-c} \cdot n} = e^c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)^n}{1-p} = e^c \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{c}{n})^n}{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{c}{n}} = e^c \cdot \frac{e^{-c}}{1} = 1,$$

waarmee het gevraagde aangetoond is.

(b) Het Poisson paradigma zegt dat $\mathbb{P}(X = 0)$ benaderd kan worden met $e^{-\mathbb{E}[X]}$ als X een som van indicatoren is die weinig afhankelijkheden hebben. In dit geval krijgen we dus

$$\mathbb{P}(X = 0) \approx e^{-\mathbb{E}[X]} \approx e^{-e^{-c}\cdot n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Anders gezegd: de graaf heeft asymptotisch bijna zeker geen geïsoleerde knopen.

(c) Zij X_i de indicator van de gebeurtenis dat knoop i geïsoleerd is voor $i = 1, \ldots, n$, dus

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] = (1-p)^{n-1}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n X_i X_j\right] \\ &= n\mathbb{E}[X_1^2] + n(n-1)\mathbb{E}[X_1 X_2] = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}.\end{aligned}$$

Voor de variantie vinden we dus

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2} \\ &= \mathbb{E}[X] + n^2\big((1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2}\big) - n(1-p)^{2n-3} \\ &= \mathbb{E}[X] + n^2 p(1-p)^{2n-3} - n(1-p)^{2n-3}.\end{aligned}$$

Aangezien $n^2 p = n$ als $c = 1$ vinden we inderdaad dat $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X]$.

(d) Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\mathbb{P}(X = 0) \le \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \ge \mathbb{E}X) \le \frac{\mathrm{Var}X}{(\mathbb{E}X)^2} = \frac{1}{\mathbb{E}X} \sim \frac{e}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Opgave 4 (25+8 punten)

In deze opgave bekijken we een gerichte variant van het configuratiemodel. We construeren een random graaf op n knopen waarin elke kant een richting krijgt. We nemen aan dat voor elke knoop $i \in [n]$ het aantal uitgaande kanten (de *out degree*) d_i gegeven is. Elke uitgaande kant wordt verbonden met een uniform gekozen knoop, waarbij zelfloops en dubbele kanten zijn toegestaan. Het aantal inkomende kanten van een knoop ligt dus niet vast.
U mag in deze opgave gebruiken dat $e < 3$ en dat $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

(a) Neem $d_i = 2$ voor alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Bewijs dat asymptotisch bijna zeker vanuit elke knoop minstens één derde van de overige knopen bereikbaar is met een gericht pad.

Hint: Neem $S \subset [n]$ en kijk naar het aantal kanten naar S^c.

(b) Is dit voldoende om te garanderen dat de graaf sterk samenhangend is, d.w.z. dat elke knoop vanuit elke andere knoop bereikbaar is?

Uitwerking

(a) Zij $S \subset [n]$ met $|S| = k$. Dan zijn er $2k$ kanten met beginpunt in S. Voor elke kant is de kans dat het eindpunt ook in S zit gelijk aan $|S|/n = k/n$. De kans dat er geen kant van S naar S^c gaat is dus

$$\mathbb{P}(S \not\to S^c) = \left(\frac{k}{n}\right)^{2k}.$$

De kans dat er een verzameling S met k elementen bestaat die geen kant naar het complement heeft voldoet aan

$$\mathbb{P}(\exists S, |S| = k : S \not\to S^c) \leq \binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^{2k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \left(\frac{k}{n}\right)^{2k} = \frac{e^k k^k}{n^k}. \tag{1}$$

Voor vaste k gaat deze kans naar 0, maar dat is nog niet voldoende. We willen dat de kans dat er een verzameling S is met $|S| \leq n/3$ en $S \not\to S^c$ naar 0 gaat. Deze kans kunnen we begrenzen door (1) te sommeren over k.

We maken onderscheid tussen kleine en grote k. Als $k \leq n^{1/2}$, dan

$$\frac{e^k k^k}{n^k} \leq \left(\frac{e}{\sqrt{n}}\right)^k.$$

Sommeren over k:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} (\frac{e}{\sqrt{n}})^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{e}{\sqrt{n}})^k \leq \frac{e/\sqrt{n}}{1 - \frac{e}{\sqrt{n}}}.$$

Als $n^{1/2} < k \leq \frac{n}{3}$, dan

$$\frac{e^k k^k}{n^k} < (e/3)^k < (e/3)^{\sqrt{n}}$$

Sommeren over k:

$$\sum_{k=\lceil\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor n/3\rfloor} (e/3)^{\sqrt{n}} \leq n \cdot (e/3)^{\sqrt{n}} = (e/3)^{\sqrt{n} - \frac{\log(n)}{1-\log(3)}}.$$

We vinden dus

$$\mathbb{P}(\exists S, |S| \leq n/3 : S \not\to S^c) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \frac{e^k k^k}{n^k} \leq \frac{e/\sqrt{n}}{1 - \frac{e}{\sqrt{n}}} + (e/3)^{\sqrt{n} - \frac{\log(n)}{1-\log(3)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Asymptotisch bijna zeker heeft elke verzameling met minder dan $n/3$ knopen een gerichte kant naar het complement. Dus als we met één knoop v beginnen en steeds een bereikbare knoop uit het complement toevoegen, dan kunnen we inductief een verzameling knopen maken die bereikbaar zijn met gerichte paden vanuit v. Deze verzameling bevat minstens een derde van de graaf.

(b) Nee. Het zou bijvoorbeeld kunnen dat de graaf uit twee disjuncte stukken bestaat die allebei meer dan een derde van de knopen bevatten. Zo'n graaf voldoet aan de eigenschap, maar is niet sterk samenhangend. Een ander voorbeeld is dat er knopen zijn die geen inkomende kanten hebben.

EINDE