Tentamen Toegepaste Stochastiek

21 augustus 2018, 8:30-11:30

- Er zijn 90 punten te verdienen. U krijgt er 10 gratis.
- Maak elke opgave op een apart vel, vergeet niet uw naam en studienummer op elk vel te vermelden.

Opgave 1 **(5 punten)**

Beschouw het configuratiemodel waarbij de graad van elke knoop gelijk is aan 2. Dubbele kanten en zelfloops zijn toegestaan. Beschrijf in ten hoogste drie zinnen de constructie en structuur van de resulterende graaf.

Uitwerking
Elke knoop heeft twee halfkanten, elke halfkant wordt met een uniform gekozen andere gepaard. Aangezien elke knoop precies 2 buren heeft, is elke samenhangende component van de resulterende graaf een cykel. Indien een component slechts één knoop (zelfloop) of twee knopen (met dubbele kant) heeft, dan kan een knoop respectievelijk zijn eigen buur zijn of aan beide kanten dezelfde buur hebben.

Opgave 2 **(7+7+14+14=42 punten)**

Zij $G = G_{n,p}$ de Erdős-Rényi graaf. Voor $k \geq 3$, zij C_k een cykel op k knopen en definiëer

- X_k als het aantal cykels van lengte k in G,
- Y_k als het aantal cykels van lengte ten hoogste k in G.

(a) Laat zien dat C_k strikt gebalanceerd is en bepaal het aantal automorfismen a_k van C_k.

(b) Neem $k = 3$ en bepaal $p = p(n)$ zodat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

(Gebruik een stelling uit het college.)

(c) Neem nu $p = \frac{1}{n}$ en laat zien dat

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_k] = 0 \qquad \text{en} \qquad \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_k] = \infty.$$

(d) Neem nu $p = o(\frac{1}{n})$ en toon aan dat

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_k = 0) = 1.$$

Uitwerking

(a) De graaf C_k heeft k kanten en k knopen, dus heeft dichtheid $\rho(C_k) = 1$. Zij nu H een strikte subgraaf van C_k. Dan is de graaf H een collectie van disjuncte paden. In elk pad van lengte l zitten l kanten en $l+1$ knopen. Voor de dichtheid van H geldt dus

$$\rho(H) = \frac{|E(H)|}{|V(H)|} < 1 = \rho(C_k),$$

en dus is C_k strikt gebalanceerd.

Zij $V_k := \{1, 2, \ldots, k\}$ de knoopverzameling van C_k. Neem aan dat deze nummering de cykel volgt. Om het aantal automorfismen van C_k te vinden moeten we een bijecties op V_k bekijken. Zij b zo'n bijectie. Indien geldt: knopen u, v verbonden desda $b(u), b(v)$ verbonden, dan geeft deze bijectie een automorfisme. We moeten tellen hoeveel van deze bijecties we kunnen construeren.

Het beeld $b(1)$ van knoop 1 kan op k manieren gekozen worden. Vervolgens moet $b(2)$ een buurknoop zijn van $b(1)$, dus $b(2)$ kan op 2 manieren gekozen worden. Daarna ligt alles vast. Er zijn dus $2k$ automorfismen.

Je kunt ook zeggen: als je C_k cyclisch wilt doorlopen, dan kun je op k plaatsen beginnen, en je kunt uit 2 richtingen kiezen, dus $2k$ automorfismen.

(b) De stelling die hier van toepassing is zegt dat voor een strikt gebalanceerde graaf H, een constante $c > 0$ en $p = c \cdot n^{-1/\rho(H)}$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_{n,p} \text{ heeft geen subgraaf } H) = e^{-c^{|E|}/a},$$

waarbij $|E|$ het aantal kanten in H is, en a het aantal automorfismen van H.

We nemen voor H hier C_3, zodat $\rho(H) = 1$, $|E| = 3$ en $a = 6$.
Oplossen van $e^{-c^3/6} = \frac{1}{2}$ geeft $c = \sqrt[3]{6\log(2)}$, en $p(n) = \sqrt[3]{6\log(2)} \cdot n^{-1}$.

(c) We bepalen eerst $\mathbb{E}[X_k]$ voor willekeurige vaste k.

$$\mathbb{E}[X_k] = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot \frac{1}{2k} \cdot p^k = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

Als $n \to \infty$, dan gaat de eerste term naar n^k. Er geldt dus

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_k] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0.$$

Voor de tweede gevraagde gelijkheid gebruiken we dat $Y_k = \sum_{i=3}^{k} X_i$. Hieruit volgt

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_k] = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=3}^{k} \frac{1}{2k} = \infty.$$

(d) We gaan eerst $\mathbb{E}[X_k]$ begrenzen voor vaste k.

$$\mathbb{E}[X_k] = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot \frac{1}{2k} \cdot p^k \sim \frac{(np)^k}{2k}.$$

Omdat $p = o(1/n)$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} np = 0$, dus $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_k] = 0$ voor elke k. Er geldt dus ook voor elke k

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_k] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=3}^{k} \mathbb{E}[X_i] = 0.$$

Gebruik nu de ongelijkheid van Markov om te concluderen dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_k \geq 1) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_k] = 0,$$

en dus geldt voor elke k

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_k = 0) = 1,$$

waarmee het gevraagde volgt.

Opgave 3 (18+10=28 punten)

In deze opgave beschouwen we de Ramseygetallen $R(k, k, k)$, gedefinieerd als het minimale aantal knopen n zodat elke kleuring van de kanten van de volledige graaf K_n in rood, wit en blauw[1] een monochromatische subgraaf K_k oplevert.

(a) Bewijs dat

$$R(k, k, k) \geq \frac{k\sqrt{3}^k}{e\sqrt{3} \cdot 3^{1/k}}.$$

U mag gebruiken dat $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

(b) Bewijs dat $R(3, 3, 3) \leq 17$. U mag gebruiken dat $R(3, 3) = 6$.

Uitwerking

[1] of: zwart, rood en geel

(a) Beschouw een willekeurige kleuring van de kanten van K_n, waarbij elke kant onafhankelijk van alle andere kanten gekleurd wordt, en waarbij de kleuren elk kans $1/3$ hebben. Zij nu

$$X := \#\text{ rode } K_k, \qquad Y := \#\text{ witte } K_k, \qquad Z := \#\text{ blauwe } K_k.$$

Dan geldt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Indien voor zekere n geldt $\mathbb{E}[X+Y+Z] < 1$, dan bestaat er een kleuring van K_n waarvoor $X+Y+Z=0$, hetgeen impliceert dat $R(k,k,k) > n$. Merk op dat

$$\mathbb{E}[X+Y+Z] = 3\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{\binom{k}{2}} \leq 3\left(\frac{en}{k}\right)^k \cdot 3^{-k(k-1)/2}.$$

Het rechterlid gelijkstellen aan 1 en oplossen geeft

$$n = \frac{k\sqrt{3}^k}{e\sqrt{3}\cdot 3^{1/k}},$$

hetgeen een ondergrens is voor $R(k,k,k)$.

(b) We moeten laten zien dat elke kleuring van K_{17} een monochromatische driehoek oplevert. Zij v een willekeurige knoop. Er zijn 16 kanten vanuit deze knoop, dus er is een kleur die minstens 6 keer voorkomt, zeg rood. Beschouw nu 6 knopen die met een rode kant met v verbonden zijn. Indien twee daarvan ook met een rode kant met elkaar verbonden zijn, dan is er een rode driehoek. Indien alle kanten tussen deze 6 knopen wit of blauw zijn, dan is er een witte of blauwe driehoek, want $R(3,3)=6$.

Opgave 4 (15 punten)

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig, en zij A een $n \times n$ matrix, waarin alle n^2 getallen verschillend zijn. Laat zien: als n groot genoeg, dan bestaat er een permutatie van de kolommen van A zodanig dat geen enkele rij van A een stijgende deelrij van lengte groter dan $(1+\varepsilon)e\sqrt{n}$ bevat.
Voorbeeld: het langste stijgende deelrijtje in $3,9,6,1,8,7,5,2,4$ heeft lengte 3. U mag de volgende twee ongelijkheden gebruiken:

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k, \qquad \text{en} \qquad k! \geq \sqrt{2\pi k}\cdot\frac{k^k}{e^k}.$$

Uitwerking
Neem een willekeurige permutatie van de kolommen. Zij X_k het totaal aantal stijgende

deelrijtjes van lengte k in de rijen van A. Elk deelrijtje van lengte k heeft kans $\frac{1}{k!}$ om stijgend te zijn. Dus

$$\mathbb{E}[X_k] = n \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \cdot \frac{ne^k}{\sqrt{2\pi k} \cdot k^k} = \frac{n}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e^2 n}{k^2}\right)^k.$$

Voor $k > (1+\varepsilon)e\sqrt{n}$ vinden we de volgende bovengrens:

$$\mathbb{E}[X_k] \leq \frac{n}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{2k} \leq k^2 \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{2k}.$$

Dit gaat naar 0 als k naar ∞, dus voor n groot genoeg geldt $\mathbb{E}[X_k] < 1$. Er bestaat dus een permutatie waarvoor $X_k = 0$, waarmee het gevraagde bewezen is.

EINDE