Radboud Universiteit Nijmegen — Heyendaalseweg 135
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica — 6525 AJ Nijmegen

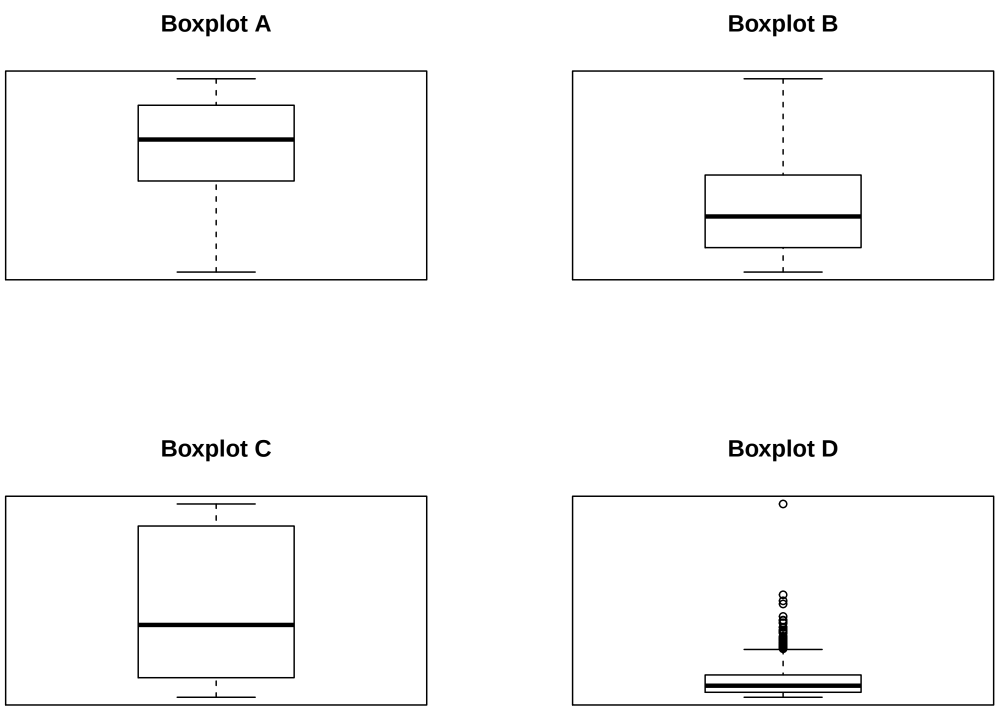
Tentamen — **18-01-2022**

Statistiek (NWI-WB106) — **8:30-11:30**

Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken en het bijgeleverde formuleblad. Het is *niet* toegestaan een boek, aantekeningen, telefoons of apparaten met internetverbinding te gebruiken.

1. Onderstaand ziet u vier boxplots en vier (gedeeltelijke) definities van verdelingsfuncties. Welke verdelingsfunctie hoort bij welke boxplot?

$$\begin{array}{rlr}
\text{I.} & F(x) = x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\
\text{II.} & F(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3), & -1 \leq x \leq 1 \\
\text{III.} & F(x) = 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\
\text{IV.} & F(x) = 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 0
\end{array}$$



2. Zij $X_1, \ldots, X_7$ een steekproef uit een onbekende continue verdeling met mediaan m. Stel dat het eerste kwartiel van de steekproef positief is. Toets bij $\alpha = 0.05$ de hypothese $H_0 : m < 0$ door de exacte p-waarde te bepalen.

   Hint: definieer $T := \#\{i : X_i < 0\}$.

3. Bij de start van een medisch onderzoek wordt van 25.600 personen de zoutconcentratie in het bloed bepaald. Het gemiddelde is 140 mmol/liter met een standaarddeviatie van 6 mmol/liter. Deze proefpersonen worden gevolgd en na vijfentwintig jaar is bij 64 personen de diagnose ventrikelhypertrofie gesteld. De zoutconcentratie bij deze 64 personen was bij de start van de studie gemiddeld 142 mmol/liter.

   (a) Formuleer een geschikt statistisch model voor deze situatie. Onderscheid hierbij twee groepen in de populatie.

   (b) Toets bij $\alpha = 0.05$ of de gemiddelde zoutconcentraties in de twee groepen verschillend zijn. Geef hypothesen, toetsingsgrootheid en conclusie. Welke aanname(s) moet u maken? Slimme verwaarlozingen zijn toegestaan.

4. De vertraging V in minuten van een lijnbus modelleren we met een Exp(λ)-verdeling. In een steekproef van omvang $n = 100$ vinden we een gemiddelde vertraging van 5 minuten.

   (a) Schat hiermee kans op meer dan een kwartier vertraging.

   (b) Bepaal de Fisher-informatie i_λ van V.

   (c) Gebruik de exacte Fisher-informatie om een benaderend 95%-betrouwbaarheidsinterval voor λ te construeren.

5. De dikte D van de schuimlaag op een glas bier neemt exponentieel af in de tijd. Beschouw het volgende regressiemodel

$$D = e^{\alpha - \beta \cdot t} + \varepsilon,$$

   met $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Hierbij bepaalt α de aanvankelijke dikte en $\beta > 0$ de snelheid waarmee de schuimlaag verdwijnt. Bij n glazen meet men op verschillende tijdstippen $t_1, \ldots, t_n$ de diktes $D_1, \ldots, D_n$.

   (a) Laat zien dat de loglikelihoodfunctie voldoet aan

$$l(\alpha, \beta, \sigma; D) \propto -n \log(\sigma) - \frac{S}{2\sigma^2},$$

   met $S := \sum_{i=1}^n (D_i - e^{\alpha - \beta t_i})^2$.

   (b) Laat zien dat de maximumlikelihoodschatters $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ en $\hat{\sigma}$ voldoen aan

$$e^{\hat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i e^{-\hat{\beta} t_i}}{\sum_{i=1}^n e^{-2\hat{\beta} t_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i D_i e^{-\hat{\beta} t_i}}{\sum_{i=1}^n t_i e^{-2\hat{\beta} t_i}}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_i - e^{\hat{\alpha} - \hat{\beta} t_i})^2.$$

   (c) Een kroegbaas vindt $D = e^{\alpha - \beta \cdot t + \varepsilon}$ een beter model. Wat vindt u en waarom?

EINDE

Puntenverdeling volgens onderstaande tabel.

Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	15	20	25	20	10	100

Indien u ten minste 50 punten scoort, dan is uw eindcijfer het afgeronde gemiddelde van het tentamencijfer en het cijfer voor de inleveropgaven.
Indien u minder dan 50 punten scoort, dan is uw afgeronde tentamencijfer uw eindcijfer.

Formuleblad bij Statistiek

N.B.: Dit blad is niet een samenvatting of overzicht, en dient slechts als hulpmiddel.

Kansverdelingen

1. **Alternatieve of Bernoulli verdeling**: Alt(p) of Ber(p).
   $\mathrm{P}(X=1)=p$ en $\mathrm{P}(X=0)=1-p$. EX$=p$; Var$(X)=p(1-p)$.
2. **Binomiale verdeling**: Bin(n,p).
   $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ voor $k=0,1,\ldots,n$. EX$=np$; Var$(X)=np(1-p)$.
3. **Geometrische verdeling** : Geo(p).
   $\mathrm{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ voor $k=1,2,\ldots$. EX$=1/p$; Var$(X)=(1-p)/p^2$.
4. **Poisson-verdeling**: Pois(μ).
   $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ voor $k=0,1,\ldots$. EX$=\mu$; Var$(X)=\mu$.
5. **Exponentiële verdeling**: Exp(λ).
   $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ en $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ voor $x\geq 0$. EX$=1/\lambda$; Var$(X)=1/\lambda^2$.
6. **Homogene of Uniforme verdeling** op $[a,b]$: hom$[a,b]$ of $U(a,b)$.
   $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ en $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ voor $a\leq x\leq b$. EX$=\frac{1}{2}(a+b)$; Var$(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$.
7. **Normale verdeling**: $N(\mu,\sigma^2)$.
   $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ en $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}dt$. EX$=\mu$; Var$(X)=\sigma^2$.
8. **Gamma verdeling**: $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ $(\alpha,\lambda>0)$.
   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}1_{[0,\infty)}(x)$ met $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$. EX$=\alpha/\lambda$; Var$(X)=\alpha/\lambda^2$.
9. **Beta verdeling**: $B_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$.
   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}1_{[0,1]}(x)$ met $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$.
   EX$=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$; Var$(X)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.
10. **Chikwadraat-verdeling**: χ^2_n $(n\geq 1)$.
    Als $Z_1,\ldots,Z_n\sim N(0,1)$ i.i.d. en $X=\sum_{i=1}^n Z_i^2$, dan $X\sim\chi^2_n$. EX$=n$; Var$(X)=2n$.
11. **t-verdeling of Student-verdeling**: t_n $(n\geq 1)$.
    Als $Z\sim N(0,1)$ en $Y\sim\chi^2_n$ onafhankelijk en $X=\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$, dan $X\sim t_n$.
    EX$=0$ voor $n\geq 2$; Var$(X)=\frac{n}{n-2}$ voor $n\geq 3$.
12. **F-verdeling**: $F_{m,n}$ $(m,n\geq 1)$.
    Als $Y\sim\chi^2_m$ en $Z\sim\chi^2_n$ onafhankelijk, en $X=\frac{Y/m}{Z/n}$, dan $X\sim F_{m,n}$.
    EX$=\frac{n}{n-2}$ voor $n\geq 3$; Var$(X)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ voor $n\geq 5$.

Covariantie en correlatie

1. Definitie covariantie: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$.
   Eigenschappen: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$, $\mathrm{Cov}(rX+s, tY+u) = rt\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. Definitie correlatiecoëfficiënt: $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.
   Schatter (steekproefcorrelatiecoëfficiënt):
   $$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$
3. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Empirische verdelingsfunctie

Voor een dataset van n elementen: $F_n(x) = \dfrac{\text{aantal elementen in de dataset } \leq x}{n}$.

Centrale limietstelling

Als $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochasten is met alle dezelfde verdeling en met verwachting μ and variantie σ^2, dan geldt:

Centrale limietstelling:
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \mathrm{P}(Z \leq a),$$
waarbij Z een $N(0,1)$ verdeling heeft.

Locatie-schaal families

De locatie-schaal familie van dichtheden behorende bij een dichtheid f, wordt gegeven door
$$\left\{ f_{a,\lambda}(\cdot) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\cdot - a}{\lambda}\right) \mid a \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \right\}.$$
Als $Z \sim f$ en $X = \lambda Z + a$, dan $X \sim f_{a,\lambda}$.

Kwantielen

Het α-onderkwantiel van een stochast X met verdelingsfunctie F wordt gedefinieerd als
$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}(X \leq x) \geq \alpha\}.$$
Als $X = \lambda Z + a$, dan $F_X^{-1}(\alpha) = \lambda F_Z^{-1}(\alpha) + a$. Voor een dataset $x_1, \ldots, x_n$ schatten we het α-onderkwantiel $\hat{x}_\alpha$ door $k = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor$, $\eta = \alpha(n+1) - k$ en $\hat{x}_\alpha = (1-\eta)x_{(k)} + \eta x_{(k+1)}$.

Schatters

De onzuiverheid (bias) van een schatter T voor θ: $ET - \theta$.
Als T_1 en T_2 zuivere schatters voor θ zijn, dan heet T_2 efficiënter dan T_1 als $\mathrm{Var}(T_2) < \mathrm{Var}(T_1)$.
De 'mean squared error' van een schatter T voor θ: $\mathrm{MSE}(T) = E(T-\theta)^2$.
Eigenschap: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}(T) + (ET - \theta)^2$.

Gestandaardiseerd en gestudentiseerd steekproefgemiddelde

Als X_i een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling hebben voor $i = 1, \ldots, n$, en onafhankelijk zijn, dan hebben

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{en} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

een $N(0,1)$, respectievelijk $t(n-1)-$verdeling. Hierbij is $t(n-1)$ de t-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Verder geldt

$$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Twee steekproeven t-toets

Zij $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ en $Y \sim N(\nu, \tau^2)$. Schatters voor Var $\left(\bar{X}_n - \bar{Y}_m\right)$:

Bij gelijke varianties ($\sigma = \tau$): $\dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right).$

Bij ongelijke varianties ($\sigma \neq \tau$): $\dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}.$

Likelihood-ratiotoets

Zij $X \sim p_\theta$. De likelihood-ratiotoetsingsgrootheid voor $H_0 : \theta \in \Theta_0$ is

$$\lambda_n(X) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p_\theta(X)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(X)} = \frac{p_{\hat{\theta}}(X)}{p_{\hat{\theta}_0}(X)}.$$

Onder gladheidsvoorwaarden geldt voor $n \to \infty$, $k = \dim(\Theta)$ en $k_0 = \dim(\Theta_0)$

$$2\log(\lambda_n(X)) \xrightarrow{d} \chi^2_{k-k_0}.$$

Betrouwbaarheidsgebieden

Zij $X \sim p_\theta$. Een gebied $G_X \subseteq \Theta$ is een $(1-\alpha)$-betrouwbaarheidsgebied voor θ als

$$\mathbb{P}_\theta(G_X \ni \theta) \geq 1 - \alpha, \qquad \text{voor alle } \theta \in \Theta.$$

Score-functie, Fisher-informatie en maximum likelihood-schatter

Zijn $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. met $X_1 \sim p_\theta$. De score-functie is $\dot{l}_\theta(x) := \frac{\partial}{\partial\theta}\log p_\theta(x)$. De Fisher-informatie is $i_\theta = \mathrm{Var}_\theta(\dot{l}_\theta(X_1))$. $(= -\mathbb{E}[\ddot{l}_\theta(X_1)]$ onder regulariteitseisen)

Zij $\hat{\theta}_n$ de maximum-likelihood schatter voor θ. Onder gladheidsvoorwaarden geldt voor $n \to \infty$

$$\sqrt{n i_\theta}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Lineaire regressie

Enkelvoudig model: $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, met $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Schatters (mle):

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x} \qquad \hat{\beta} = \frac{S_Y}{s_x} r_{x,Y}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2.$$

Meervoudig model: $Y = X\beta + \varepsilon$, met $Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^{n \times p}, \beta \in \mathbb{R}^p$ en $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Schatters (mle):

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\|Y - X\hat{\beta}\|^2.$$

Volledige oplossingen:

1 In alle gevallen is de vorm van de dichtheid te vinden door de afgeleide van F te nemen. Verder voldoet de mediaan m aan $F(m) = \frac{1}{2}$.

Verdelingsfunctie I leeft op $[0, 1]$, en heeft mediaan $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.71$. De afgeleide van verdelingsfunctie II is symmetrisch op $[-1, 1]$. Verdelingsfunctie III is de exponentiële verdeling, dus dichtheid maximaal bij nul en dalend, grote outliers mogelijk. Verdelingsfunctie IV leeft op $[-1, 0]$ en heeft mediaan $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx -0.71$.

De juiste combinaties zijn dus: I:A, II:C, III:D, IV:B.

2 Neem als toetsingsgrootheid $T := \#\{i : X_i < 0\}$. Het eerste kwartiel van de steekproef is $X_{(2)}$, dus het eerste kwartiel is alleen positief als $T \leq 1$. Onder de nulhypothese geldt $P(X_i < 0) \geq P(X_i < m) = \frac{1}{2}$. Dus T is binomiaal verdeeld met succeskans ten minste $\frac{1}{2}$. In het randgeval $m = 0$ is de succeskans precies $\frac{1}{2}$. De p-waarde is gelijk aan

$$\begin{aligned}\sup_{m<0} \mathbb{P}(X_{(2)} \geq 0) &= \sup_{m<0} \mathbb{P}(T \leq 1) = \mathbb{P}(\mathrm{Bin}(7, \tfrac{1}{2}) \leq 1) \\ &= (\tfrac{1}{2})^7 + 7 \cdot (\tfrac{1}{2})^7 = 8 \cdot (\tfrac{1}{2})^7 = (\tfrac{1}{2})^4 = \tfrac{1}{16} > \tfrac{1}{20} = \alpha.\end{aligned}$$

De nulhypothese wordt dus niet verworpen.

Opmerking:

- Een veelgemaakte fout is dat de mediaan m van de verdeling werd verward met de mediaan van de steekproef. De mediaan van de steekproef is $X_{(4)}$, maar die zal in het algemeen niet gelijk zijn aan m. De mediaan van de steekproef is wel een schatter voor de mediaan van de verdeling.

  Ter vergelijking: het gemiddelde van een steekproef uit de standaard normale verdeling is meestal ook niet gelijk aan 0.

3a We onderscheiden personen die binnen 25 jaar ventrikelhypertrofie zullen hebben (eerste groep), en personen die dat niet zullen hebben (tweede groep). We nemen aan dat de zoutconcentraties X_i (eerste groep) en Y_i (tweede groep) normaal verdeeld zijn:

$$X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Opmerkingen:

- Het opstellen van een statistisch model betekent dat je stochast(en) definiëert en aannames doet over de kansverdeling van deze stochasten. Vaak legt het model de vorm van de kansverdeling vast, en zijn er alleen een of enkele parameters onbekend. Dat is wat we hier ook doen. Zo'n model heet een *parametrisch model.*

  Als model werd soms een t-verdeling genomen. Het is veel logischer om een normale verdeling te nemen. De t-verdeling komt pas in beeld als een normaal verdeelde toetsingsgrootheid een onbekende standaarddeviatie σ heeft, en men wil standaardiseren. Dan moet σ benaderd worden, en dat zorgt er voor dat de gestandaardiseerde toetsingsgrootheid niet meer exact normaal verdeeld is, maar een t-verdeling krijgt.

- Een andere fout is dat de hele kansverdeling inclusief parameters vastgelegd wordt. Maar als je al aanneemt dat $\mu_1 = 140$ en $\mu_2 = 142$, dan weet je al dat $\mu_1 \neq \mu_2$. Dan valt er helemaal niks meer te toetsen.

3b Hypothesen:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Aangezien we alleen iets weten over de standaarddeviatie in de hele populatie, nemen we aan dat $\sigma_1 = \sigma_2 =: \sigma$. Onder de nulhypothese geldt:

$$\mathrm{Var}(\overline{X} - \overline{Y}) = \mathrm{Var}(\overline{X}) + \mathrm{Var}(\overline{Y}) = \frac{\sigma^2}{25600 - 64} + \frac{\sigma^2}{64} \approx 0.0157 \cdot \sigma^2.$$

Eventueel kan de eerste term verwaarloosd worden, zodat overblijft $\sigma^2/64$. Voor σ hebben we een nauwkeurige schatting $\hat{\sigma} = 6$. Als toetsingsgrootheid nemen we

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/64}} \approx \frac{140 - 142}{6/8} = \frac{8}{3} \approx 2.66.$$

Merk op dat we hier $\overline{X}$ benaderen met 140. In werkelijkheid geldt $\overline{X} \approx 139.995$. Onder de nulhypothese is T bij benadering standaard normaal verdeeld, de omvang van de steekproef is groot genoeg om geen t-verdeling meer te gebruiken. Met behulp van de tabel vinden we de p-waarde bij de tweezijdige toets: $2 \cdot 0.0038 = 0.0076$, dus H_0 wordt verworpen. Dezelfde conclusie kan bereikt worden door op te merken dat 2.66 groter is dan de kritieke waarde 1.96.

Opmerkingen:

- Omdat groep 1 heel groot is, is het verdedigbaar om aan te nemen dat $\mu_1 = 140$ en vervolgens te toetsen $\mu_2 = 140$. Het wordt dan dus één-steekproef toets. Dit leidt tot dezelfde conclusie.
- De hypothese kan ook getoetst worden met een likelihood-ratio toets.

4a De dichtheid van V is $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Noem de steekproef $V_1, \dots, V_n$. De likelihood-functie is

$$L(\lambda; V) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda V_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} V_i}.$$

Loglikelihood en afgeleide:

$$l(\lambda; V) = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} V_i, \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda; V) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

De afgeleide is dalend, dus nul stellen geeft de maximum-likelihoodschatter

$$\hat{\lambda} := \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{1}{\overline{V}} = \frac{1}{5}.$$

De kans op meer dan een kwartier vertraging is

$$\mathbb{P}(V > 15) = 1 - \mathbb{P}(V \leq 15) = 1 - (1 - e^{-15\cdot\lambda}) = e^{-15\cdot\lambda}$$

en kunnen we schatten door

$$\mathbb{P}(V > 15) \approx e^{-15\cdot\hat{\lambda}} = e^{-3} \approx 0.0498.$$

4b Bepaal eerst de scorefunctie:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log(f(x)) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\log(\lambda) - \lambda x) = \frac{1}{\lambda} - x.$$

De Fisher-informatie is nu

$$i_\lambda = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\lambda} - V\right) = \mathrm{Var}(V) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4c Gebruik dat $\sqrt{ni_\lambda}(\hat{\lambda} - \lambda)$ een asymptotische pivot is met standaard normale verdeling in de limiet $n \to \infty$. Dit geeft

$$\begin{aligned}
0.95 &\approx \mathbb{P}\left(-\xi_{0.975} \le \sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}\left(\frac{1}{\overline{V}} - \lambda\right) \le \xi_{0.975}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{\xi_{0.975}}{\sqrt{n}} \cdot \lambda \le \frac{1}{\overline{V}} - \lambda \le \frac{\xi_{0.975}}{\sqrt{n}} \cdot \lambda\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(1 - \frac{\xi_{0.975}}{\sqrt{n}}\right) \cdot \lambda \le \frac{1}{\overline{V}} \le \left(1 + \frac{\xi_{0.975}}{\sqrt{n}}\right) \cdot \lambda\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\overline{V} \cdot \left(1 + \frac{\xi_{0.975}}{\sqrt{n}}\right)} \le \lambda \le \frac{1}{\overline{V} \cdot \left(1 - \frac{\xi_{0.975}}{\sqrt{n}}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Invullen van $\overline{V} = 5$ en $n = 100$ geeft als benaderend betrouwbaarheidsinterval $[0.167, 0.249]$. Merk op dat dit interval niet symmetrisch is rond $\hat{\lambda}$.

Opmerking:

- De uitspraak dat $\sqrt{ni_\lambda}(\hat{\lambda} - \lambda)$ asymptotisch normaal is, geldt als $\hat{\lambda}$ de maximum likelihoodschatter is. Als u bij (a) een andere schatter had, moet dat dus hier nog aangetoond worden.

5a D_i is normaal verdeeld met verwachting $e^{\alpha-\beta t_i}$, dus de likelihoodfunctie is

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \beta, \sigma; D) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(D_i - e^{\alpha-\beta t_i})^2} \\
&= \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(D_i - e^{\alpha-\beta t_i})^2}
\end{aligned}$$

De logaritme nemen geeft

$$l(\alpha, \beta, \sigma; D) = -n\log(\sigma) - n\log(\sqrt{2\pi}) - \frac{S}{2\sigma^2} \propto -n\log(\sigma) - \frac{S}{2\sigma^2}.$$

5b De loglikelihoodfunctie is maximaal als de som S minimaal is. Partiële afgeleide naar α:

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n} -2(D_i - e^{\alpha-\beta t_i})e^{\alpha-\beta t_i} = 2e^\alpha\left(e^\alpha \sum_{i=1}^{n} e^{-2\beta t_i} - \sum_{i=1}^{n} D_i e^{-\beta t_i}\right).$$

Partiële afgeleide naar β:

$$\frac{\partial S}{\partial\beta} = \sum_{i=1}^{n} 2t_i(D_i - e^{\alpha-\beta t_i})e^{\alpha-\beta t_i} = -2e^\alpha\left(e^\alpha \sum_{i=1}^{n} t_i e^{-2\beta t_i} - \sum_{i=1}^{n} t_i D_i e^{-\beta t_i}\right).$$

De termen tussen de grote haken gelijk stellen aan 0 geeft

$$e^{\alpha} = \frac{\sum D_i e^{-\beta t_i}}{\sum e^{-2\beta t_i}} = \frac{\sum t_i D_i e^{-\beta t_i}}{\sum t_i e^{-2\beta t_i}}.$$

Nu kunnen we $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$ invullen in S en l maximaliseren naar σ:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} l(\alpha, \beta, \sigma; D) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{S}{\sigma^3}.$$

Gelijk stellen aan 0 geeft de schatter

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (D_i - e^{\hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i})^2.$$

Opmerking:

- De tweede uitdrukking voor $e^{\hat{\alpha}}$ volgt niet uit de eerste! Vergelijk: $\frac{1+2}{1+3} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}$ is ook niet waar.

5c In het model van de kroegbaas wordt D nooit negatief, en bovendien gaat D naar 0 als $t \to \infty$. Dit lijkt dus inderdaad een beter model.

Opmerking:

- Het model van de kroegbaas is zeker niet ingewikkelder, want het is een standaard lineair model voor $\log(D)$.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Tabel 1: *Rechteroverschrijdingskans* $1 - \Phi(a) = P(Z \geq a)$ *van de* $N(0,1)$*-variabele* Z.

m	$p = 0.1$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabel 2: *Rechter kritieke waarden $t_{m,p}$ van de t-verdeling met m vrijheidsgraden corresponderend met rechteroverschrijdingskans p: $P(T_m \geq t_{m,p}) = p$. De laatste rij geeft de rechter kritieke waarden van de $N(0,1)$ verdeling: $t_{\infty,p} = z_p$.*

m	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.8
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.2	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
100	67.3	70.0	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabel 3: Right critical values $\chi^2_p(m)$ of the χ^2-distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p: $\mathrm{P}\left(\chi^2(m) \geq \chi^2_p(m)\right) = p$.