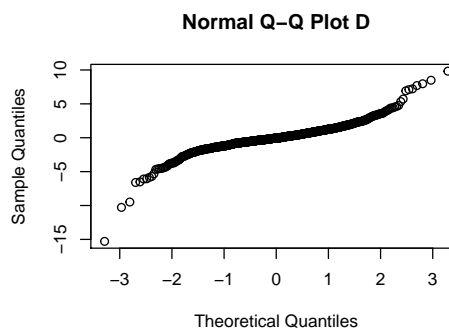
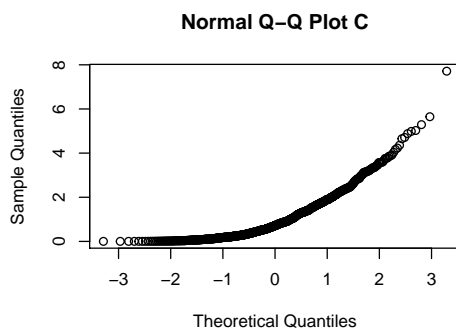
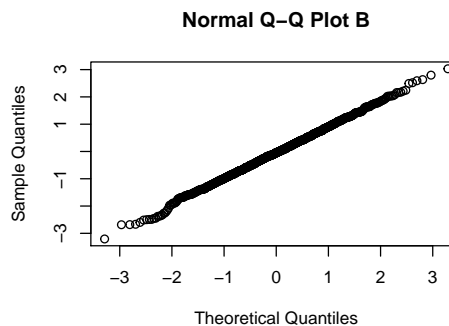
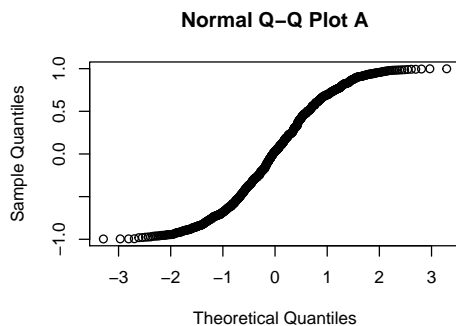


Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken en het bijgeleverde formuleblad. Het is *niet* toegestaan een boek, aantekeningen, telefoons of apparaten met internetverbinding te gebruiken.

1. Onderstaand ziet u vier kansdichtheidsfuncties:

- I. $f(x) = e^{-x}$ voor $x \in [0, \infty)$
- II. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ voor $x \in (-\infty, \infty)$
- III. $f(x) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi(3+x^2)^2}$ voor $x \in (-\infty, \infty)$
- IV. $f(x) = \frac{1}{2}$ voor $x \in [-1, 1]$

Uit elk van deze dichtheden is een steekproef genomen, waarvan de kwantielen zijn uitgezet in onderstaande QQ-plots A, B, C en D. Welke dichtheidsfunctie hoort bij welke QQ-plot?



2. Een fabrikant van ledstrips claimt dat de kans p dat een ledstrip na minder dan 20.000 branduren kapot gaat kleiner is dan $\frac{1}{2}$. In een partij van $n = 81$ ledstrips gingen er 48 na minder dan 20.000 branduren kapot.
- Toets de bewering van de fabrikant. Geef hierbij de nulhypothese, alternatieve hypothese, p -waarde en conclusie. Gebruik $\alpha = 0.05$.
 - We modelleren het aantal branduren B met een exponentiële verdeling: $B \sim \text{Exp}(\lambda)$. Geef een benaderend 95%-betrouwbaarheidsinterval voor λ .
Hint: kunt u een betrouwbaarheidsinterval voor p maken?
3. Zij p de kans dat iemand met corona de Britse variant heeft. Om p te schatten wordt van $n = 100$ positief geteste personen bepaald of zij de Britse variant hebben. Noem dit aantal X .
- Op basis van eerder onderzoek nemen we als a priori verdeling voor p een Beta verdeling met $\alpha = 100$ en $\beta = 200$. Laat zien dat de Bayes schatter gelijk is aan

$$\hat{p} = \frac{X}{400} + \frac{1}{4}.$$
 - Bepaal de MSE van deze schatter voor $p = \frac{1}{3}$ en voor $p = \frac{2}{3}$.
4. Lees het volgende nieuwsbericht:

Omega 3-vetzuren hebben mogelijk ook in coronatijden gunstige effecten. Amerikaanse onderzoekers namen bloedmonsters van 100 coronapatiënten die in het ziekenhuis werden opgenomen en bepaalden het gehalte aan omega 3-vetzuren in hun rode bloedcellen. De patiënten werden vervolgens aan de hand van de gevonden omega 3-waarden verdeeld in groepen van 25 personen. Veertien van de patiënten overleden, van wie één uit de groep met het hoogste niveau aan omega 3-vetzuren. De overige dertien doden vielen onder de 75 patiënten met lagere omega 3-vetzuurgehalten. Rijk aan omega 3-vetzuren zijn onder meer zalm, haring, goudvis, pistache- en walnoten en visoliesupplementen.

We willen graag toetsen of het effect in deze studie significant is. Neem als nulhypothese dat er geen verband is tussen omega 3-vetzuren en het risico op sterfte. Bedenk zelf een geschikte manier om deze hypothese te toetsen, geef de p -waarde en trek een conclusie. Gebruik $\alpha = 0.05$. (Er zijn meerdere goede antwoorden).

5. Onderstaand staat een tabel met gemiddelde huurprijzen (in euro's per maand) in Amsterdam in de jaren 2017 en 2019. Het aantal objecten in elke categorie is gelijk aan n . In totaal zijn er dus $4n$ objecten.

	2017	2019
Kamer	545	611
Appartement	1459	1581

We modelleren de huurprijs H_i van object i voor $1 \leq i \leq 4n$ als volgt:

$$H_i = h + \alpha K_i + \beta J_i + \varepsilon, \quad \text{met} \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

Hierbij zijn h , α en β parameters. De 0-1-variabelen K_i en J_i geven aan in welke categorie een object valt: $K_i = 1$ voor een kamer en $J_i = 1$ staat voor het jaar 2017.

- (a) Laat zien dat de maximum likelihoodschatters voor h , α en β de volgende som minimaliseren:

$$\sum_{i=1}^{4n} (H_i - (h + \alpha K_i + \beta J_i))^2.$$

- (b) Bepaal de schatters voor h , α en β .

EINDE

Puntenverdeling volgens onderstaande tabel.

Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	20	20	20	20	10	100

Indien u ten minste 50 punten scoort, dan is uw eindcijfer het afgeronde gemiddelde van het tentamencijfer en het cijfer voor de inleveropgaven.

Indien u minder dan 50 punten scoort, dan is uw afgeronde tentamencijfer uw eindcijfer.

Formuleblad bij Statistiek

N.B.: DIT BLAD IS NIET EEN SAMENVATTING OF OVERZICHT, EN DIENT SLECHTS ALS HULPMIDDEL.

Kansverdelingen

1. **Alternatieve of Bernoulli verdeling:** $\text{Alt}(p)$ of $\text{Ber}(p)$.

$$P(X = 1) = p \text{ en } P(X = 0) = 1 - p. \quad EX = p; \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

2. **Binomiale verdeling:** $\text{Bin}(n, p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ voor } k = 0, 1, \dots, n. \quad EX = np; \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

3. **Geometrische verdeling:** $\text{Geo}(p)$.

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ voor } k = 1, 2, \dots. \quad EX = 1/p; \quad \text{Var}(X) = (1 - p)/p^2.$$

4. **Poisson-verdeling:** $\text{Pois}(\mu)$.

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \text{ voor } k = 0, 1, \dots. \quad EX = \mu; \quad \text{Var}(X) = \mu.$$

5. **Exponentiële verdeling:** $\text{Exp}(\lambda)$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ en } F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ voor } x \geq 0. \quad EX = 1/\lambda; \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$

6. **Homogene of Uniforme verdeling op $[a, b]$:** $\text{hom}[a, b]$ of $U(a, b)$.

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \text{ en } F(x) = \frac{x - a}{b - a} \text{ voor } a \leq x \leq b. \quad EX = \frac{1}{2}(a + b); \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2.$$

7. **Normale verdeling:** $N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ en } F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt. \quad EX = \mu; \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

8. **Gamma verdeling:** $\Gamma_{\alpha, \lambda}$ ($\alpha, \lambda > 0$).

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} 1_{[0, \infty)}(x) \text{ met } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad EX = \alpha/\lambda; \quad \text{Var}(X) = \alpha/\lambda^2.$$

9. **Beta verdeling:** $B_{\alpha, \beta}$ ($\alpha, \beta > 0$).

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} 1_{[0, 1]}(x) \text{ met } B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$
$$EX = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

10. **Chikwadraat-verdeling:** χ_n^2 ($n \geq 1$).

$$\text{Als } Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1) \text{ i.i.d. en } X = \sum_{i=1}^n Z_i^2, \text{ dan } X \sim \chi_n^2. \quad EX = n; \quad \text{Var}(X) = 2n.$$

11. **t-verdeling of Student-verdeling:** t_n ($n \geq 1$).

$$\text{Als } Z \sim N(0, 1) \text{ en } Y \sim \chi_n^2 \text{ onafhankelijk en } X = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}, \text{ dan } X \sim t_n.$$
$$EX = 0 \text{ voor } n \geq 2; \quad \text{Var}(X) = \frac{n}{n-2} \text{ voor } n \geq 3.$$

12. **F-verdeling:** $F_{m, n}$ ($m, n \geq 1$).

$$\text{Als } Y \sim \chi_m^2 \text{ en } Z \sim \chi_n^2 \text{ onafhankelijk, en } X = \frac{Y/m}{Z/n}, \text{ dan } X \sim F_{m, n}.$$
$$EX = \frac{n}{n-2} \text{ voor } n \geq 3; \quad \text{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ voor } n \geq 5.$$

Covariantie en correlatie

- Definitie covariantie: $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$.
Eigenschappen: $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$, $\text{Cov}(rX + s, tY + u) = rt \text{Cov}(X, Y)$.
- Definitie correlatiecoëfficiënt: $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$.
Schatter (steekproefcorrelatiecoëfficiënt):

$$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$.

Empirische verdelingsfunctie

Voor een dataset van n elementen: $F_n(x) = \frac{\text{aantal elementen in de dataset} \leq x}{n}$.

Centrale limietstelling

Als X_1, X_2, \dots een rij onafhankelijke stochasten is met alle dezelfde verdeling en met verwachting μ and variantie σ^2 , dan geldt:

Centrale limietstelling:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{P} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a \right) = \text{P}(Z \leq a),$$

waarbij Z een $N(0, 1)$ verdeling heeft.

Locatie-schaal families

De locatie-schaal familie van dichtheden behorende bij een dichtheid f , wordt gegeven door

$$\left\{ f_{a,\lambda}(\cdot) = \frac{1}{\lambda} f \left(\frac{\cdot - a}{\lambda} \right) \mid a \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \right\}.$$

Als $Z \sim f$ en $X = \lambda Z + a$, dan $X \sim f_{a,\lambda}$.

Kwantielen

Het α -onderkwantiel van een stochast X met verdelingsfunctie F wordt gedefinieerd als

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \text{P}(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

Als $X = \lambda Z + a$, dan $F_X^{-1}(\alpha) = \lambda F_Z^{-1}(\alpha) + a$. Voor een dataset x_1, \dots, x_n schatten we het α -onderkwantiel \hat{x}_α door $k = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor$, $\eta = \alpha(n+1) - k$ en $\hat{x}_\alpha = (1-\eta)x_{(k)} + \eta x_{(k+1)}$.

Schatters

De onzuiverheid (bias) van een schatter T voor θ : $ET - \theta$.

Als T_1 en T_2 zuivere schatters voor θ zijn, dan heet T_2 efficiënter dan T_1 als $\text{Var}(T_2) < \text{Var}(T_1)$.

De 'mean squared error' van een schatter T voor θ : $\text{MSE}(T) = E(T - \theta)^2$.

Eigenschap: $\text{MSE}(T) = \text{Var}(T) + (ET - \theta)^2$.

Gestandaardiseerd en gestudentiseerd steekproefgemiddelde

Als X_i een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling hebben voor $i = 1, \dots, n$, en onafhankelijk zijn, dan hebben

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{en} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

een $N(0, 1)$, respectievelijk $t(n-1)$ -verdeling. Hierbij is $t(n-1)$ de t -verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Verder geldt

$$(n-1) \frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Twee steekproeven

Bij de twee steekproeven t -toets:

$$\text{Gelijke varianties: } S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

$$\text{Ongelijke varianties: } S_d^2 = \frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}.$$

Likelihood-ratiotoets

Zij $X \sim p_\theta$. De likelihood-ratiotoetsingsgrootte voor $H_0 : \theta \in \Theta_0$ is

$$\lambda_n(X) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p_\theta(X)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(X)} = \frac{p_{\hat{\theta}}(X)}{p_{\hat{\theta}_0}(X)}.$$

Onder gladheidsvoorwaarden geldt voor $n \rightarrow \infty$, $k = \dim(\Theta)$ en $k_0 = \dim(\Theta_0)$

$$2 \log(\lambda_n(X)) \xrightarrow{d} \chi_{k-k_0}^2.$$

Betrouwbaarheidsgebieden

Zij $X \sim p_\theta$. Een gebied $G_X \subseteq \Theta$ is een $(1-\alpha)$ -betrouwbaarheidsgebied voor θ als

$$\mathbb{P}_\theta(G_X \ni \theta) \geq 1 - \alpha, \quad \text{voor alle } \theta \in \Theta.$$

Score-functie, Fisher-informatie en maximum likelihood-schatter

Zijn X_1, \dots, X_n i.i.d. met $X_1 \sim p_\theta$. De score-functie is $\dot{l}_\theta(x) := \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(x)$. De Fisher-informatie is $i_\theta = \text{Var}_\theta(\dot{l}_\theta(X_1))$. ($= -\mathbb{E}[\ddot{l}_\theta(X_1)]$) onder regulariteitseisen

Zij $\hat{\theta}_n$ de maximum-likelihood schatter voor θ . Onder gladheidsvoorwaarden geldt voor $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{ni_\theta}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Lineaire regressie

Enkelvoudig model: $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, met $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Schatters (mle):

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{x} \quad \hat{\beta} = \frac{S_Y}{s_x} r_{x,Y}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2.$$

Meervoudig model: $Y = X\beta + \varepsilon$, met $Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ en $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Schatters (mle):

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|Y - X\hat{\beta}\|^2.$$

Volledige oplossingen:

1 I. C II. B III. D IV. A

2a Het aantal ledstrips L dat binnen 20.000 branduren kapot gaat heeft een $\text{Bin}(81, p)$ verdeling. De hypothesen zijn

$$H_0 : p < \frac{1}{2}, \quad H_1 : p \geq \frac{1}{2}.$$

Onder H_0 is L bij benadering normaal verdeeld met verwachting $81p = 40.5$ en variantie $81p(1-p) = 20.25$. Er geldt dan onder H_0

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L \geq 48) &\approx \mathbb{P}\left(N(0, 1) \geq \frac{48 - \frac{1}{2} - 40.5}{\sqrt{20.25}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(N(0, 1) \geq \frac{14}{9}\right) \approx \mathbb{P}(N(0, 1) \geq 1.56) \approx 0.0594. \end{aligned}$$

Deze kans is de p -waarde, en aangezien deze groter is dan α wordt H_0 niet verworpen.

2b We construeren eerst een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor p . Met behulp van de normale benadering $L \sim N(np, np(1-p))$ vinden we

$$\mathbb{P}\left(-\xi_{0.975} \leq \frac{L - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \xi_{0.975}\right) \approx 0.95.$$

Om het onszelf wat makkelijker te maken vervangen we p in de noemer van de breuk door een schatter \hat{p} . Herschrijven geeft dan

$$\mathbb{P}\left(\frac{L}{n} - \xi_{0.975} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{L}{n} + \xi_{0.975} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.95.$$

Invullen van $L = 48$, $n = 81$ en $\hat{p} = \frac{48}{81}$ geeft voor p het 95%-betrouwbaarheidsinterval

$$\frac{48}{81} \pm 0.107 = [0.486, 0.700].$$

Nu gebruiken we dat $p = \mathbb{P}(B \leq 20000) = 1 - e^{-\lambda \cdot 20000}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0.486 \leq p \leq 0.700) &= \mathbb{P}(0.486 \leq 1 - e^{-\lambda \cdot 20000} \leq 0.700) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\log(0.514)}{20000} \leq \lambda \leq -\frac{\log(0.300)}{20000}\right) \end{aligned}$$

Het 95% betrouwbaarheidsinterval voor λ wordt hiermee

$$[3.32 \cdot 10^{-5}, 6.01 \cdot 10^{-5}].$$

3a Het aantal X heeft een binomiale verdeling, dus

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

waaruit volgt dat

$$L(p, X) = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X}.$$

De a priori verdeling $\pi(p)$ is evenredig met $p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$. De a posteriori dichtheid voldoet dan aan

$$f_{P|X}(p) \propto p^{X+\alpha-1}(1-p)^{n-X+\beta-1}.$$

Hierin herkennen we weer een Beta($\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$) verdeling, met parameters $\tilde{\alpha} = X + \alpha$ en $\tilde{\beta} = n - X + \beta$. De Bayes schatter voor p is de verwachting van de a posteriori verdeling, dus

$$\hat{p} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} = \frac{X + n}{n + \alpha + \beta} = \frac{X + 100}{400} = \frac{X}{400} + \frac{1}{4}.$$

(Deze schatter zit dus altijd tussen $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$, ongeacht de observatie X .)

3b We gebruiken dat $\text{MSE}(\hat{p}) = \text{Var}(\hat{p}) + (\mathbb{E}[\hat{p}] - p)^2$.

$$\mathbb{E}[\hat{p}] = \frac{\mathbb{E}[X]}{400} + \frac{1}{4} = \frac{100p}{400} + \frac{1}{4} = \frac{p}{4} + \frac{1}{4} = \begin{cases} \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} & \text{als } p = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} & \text{als } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Var}[\hat{p}] = \text{Var}\left[\frac{X}{400}\right] = \frac{\text{Var}[X]}{400^2} = \frac{p(1-p)}{1600} = \begin{cases} \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 1600} = \frac{1}{7200} & \text{als } p = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 1600} = \frac{1}{7200} & \text{als } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nu vinden we

$$\text{MSE}(\hat{p}) = \begin{cases} \frac{1}{7200} & \text{als } p = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7200} + \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{7200} + \frac{1}{16} = \frac{451}{7200} & \text{als } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Dus als $p = \frac{1}{3}$, dan is de schatter veel beter. Dit komt door de keuze van de a priori verdeling, waarmee eigenlijk gezegd wordt dat van tevoren al sterk verwacht wordt dat p in de buurt van $\frac{1}{3}$ zal liggen. Als dat klopt, dan zullen de data dat bevestigen en ligt de schatter dicht bij de echte waarde. Maar als de echte waarde gelijk is aan $\frac{2}{3}$, dan zorgt die a priori verdeling er juist voor dat de schatter het heel slecht doet. Pas als de steekproef veel groter zou zijn zou de schatter dicht bij $\frac{2}{3}$ liggen.

4 Methode 1. Zij X het aantal overledenen in de hoogste groep. Onder de nulhypothese zijn de 14 overledenen willekeurig getrokken uit de groep van 100 patiënten. De verdeling van X ligt hiermee vast (dit heet een hypergeometrische verdeling). De p -waarde is dan (bij een tweezijdige toets) gelijk aan $2\mathbb{P}(X \leq 1)$. Er geldt

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{75}{13} \binom{25}{1}}{\binom{100}{14}} = 14 \cdot \frac{25}{100} \cdot \frac{75 \cdot 74 \cdot \dots \cdot 63}{99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 87} \approx 0.0716$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{75 \cdot 74 \cdot \dots \cdot 62}{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 87} \approx 0.0127.$$

Hiermee vinden we als p -waarde 0.1686, waarmee de nulhypothese niet verworpen kan worden. Er is dus geen verband aangetoond.

Method 2. Zij X het aantal overledenen in de hoogste groep en Y het aantal overige overledenen. Neem als model $X \sim \text{Bin}(25, p_1)$ en $Y \sim \text{Bin}(75, p_2)$. De nulhypothese is dan $p_1 = p_2$. We kunnen nu een likelihood-ratio toets uitvoeren. Hierbij wordt de likelihoodfunctie voor $p = (p_1, p_2)$ gegeven door

$$L(p; X, Y) = \binom{25}{X} p_1^X (1 - p_1)^{25-X} \binom{75}{Y} p_2^Y (1 - p_2)^{75-Y}.$$

De maximum likelihoodschatter voor \hat{p} voor p wordt gegeven door $\hat{p} = (\frac{1}{25}, \frac{13}{75})$. Onder de nulhypothese is de maximum likelihoodschatter $\hat{p}_0 = (\frac{14}{100}, \frac{14}{100})$. De toetsingsgrootheid is

$$\lambda(X, Y) = \frac{L(\hat{p}; X, Y)}{L(\hat{p}_0; X, Y)} = \frac{(\frac{1}{25})^X (\frac{24}{25})^{25-X} (\frac{13}{75})^Y (\frac{62}{75})^{75-Y}}{(\frac{14}{100})^{X+Y} (\frac{86}{100})^{100-X-Y}} \quad (1)$$

$$= \frac{24^{24} (\frac{13}{3})^{13} (\frac{62}{3})^{62}}{(\frac{14}{4})^{14} (\frac{86}{4})^{86}} = \frac{24^{24} \cdot 13^{13} \cdot 62^{62} \cdot 4^{100}}{3^{75} \cdot 14^{14} \cdot 86^{86}}. \quad (2)$$

De loglikelihood-ratio toetsingsgrootheid is dus

$$\begin{aligned} \log(\lambda(X, Y)) &= 24 \log(24) + 13 \log(13) + 62 \log(62) - 75 \log(3) - 14 \log(14) \\ &\quad - 86 \log(86) + 100 \log(4) \approx 1.713. \end{aligned}$$

Onder de nulhypothese heeft deze toetsingsgrootheid bij benadering een $\chi^2(1)$ verdeling, want de parameter ruimte is tweedimensionaal en de nulhypothese 1-dimensionaal. De p -waarde is dus

$$\mathbb{P}(\chi^2(1) \geq 1.713) = 2\mathbb{P}(Z > \sqrt{1.713}) = 2\mathbb{P}(Z > 1.31) = 2 \cdot 0.0951 = 0.1902.$$

Hierbij hebben we de definitie van de $\chi^2(1)$ verdeling gebruikt en de tabel van de standaard normale verdeling.

Ook met deze methode vinden we dus een p -waarde die niet leidt tot verwerping van H_0 .

Method 3. Zij X het aantal overledenen in de hoogste groep en Y het aantal overige overledenen. Neem als model $X \sim \text{Bin}(25, p_1)$ en $Y \sim \text{Bin}(75, p_2)$. De nulhypothese is dan $p_1 = p_2 =: p$. We kunnen p schatten met $\hat{p} = \frac{14}{100}$. Een mogelijke p -waarde is dan $2\mathbb{P}_{H_0}(X \leq 1)$, die we kunnen schatten met behulp van \hat{p} :

$$2\mathbb{P}_{H_0}(X \leq 1) = 2(25\hat{p}(1 - \hat{p})^{24} + (1 - \hat{p})^{25}) \approx 0.234 > 0.05.$$

Dus ook hier wordt H_0 niet verworpen. Een inferieure versie van deze methode is om $\hat{p} = \frac{13}{75}$ of zelfs (nog slechter) $\hat{p} = \frac{1}{25}$ te nemen. Deze schatters gebruiken niet alle beschikbare informatie. Ook de p -waarde kan anders gekozen worden: $2\mathbb{P}_{H_0}(Y \leq 13)$.

Method 1 verdient de voorkeur, omdat dat de meest exacte toets is. Er hoeft niks geschat of benaderd te worden. Bovendien wordt de p -waarde niet op één groep gebaseerd zoals bij Method 3.

5a Er geldt dat $H_i \sim N(h + \alpha K_i + \beta J_i, \sigma^2)$. Hiermee kunnen we de likelihoodfunctie opschrijven:

$$\begin{aligned} L(h, \alpha, \beta, H) &= \prod_{i=1}^{4n} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{H_i - (h + \alpha K_i + \beta J_i)}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sigma^{4n} (2\pi)^{2n}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{4n} (H_i - (h + \alpha K_i + \beta J_i))^2} \end{aligned}$$

De maximum likelihoodschatters maximaliseren deze functie, hetgeen equivalent is met het minimaliseren van de som.

5b Noem de som Σ . Dan geldt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial h} &= -2 \sum_{i=1}^{4n} (H_i - (h + \alpha K_i + \beta J_i)) = 0 \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} &= -2 \sum_{i:K_i=1} (H_i - (h + \alpha K_i + \beta J_i)) = 0 \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \beta} &= -2 \sum_{i:J_i=1} (H_i - (h + \alpha K_i + \beta J_i)) = 0\end{aligned}$$

Sommen gelijk stellen aan 0 geeft de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4n} H_i &= 4nh + \alpha \sum_{i=1}^{4n} K_i + \beta \sum_{i=1}^{4n} J_i = 4nh + 2n(\alpha + \beta) \\ \sum_{i:K_i=1} H_i &= \sum_{i:K_i=1} h + \alpha \sum_{i:K_i=1} K_i + \beta \sum_{i:K_i=1} J_i = 2n(h + \alpha) + n\beta \\ \sum_{i:J_i=1} H_i &= \sum_{i:J_i=1} h + \alpha \sum_{i:J_i=1} K_i + \beta \sum_{i:J_i=1} J_i = 2n(h + \beta) + n\alpha\end{aligned}$$

Delen door n en invullen van de waarden in de tabel leidt tot

$$\begin{aligned}545 + 611 + 1459 + 1581 &= 4196 = 4h + 2\alpha + 2\beta \\ 545 + 611 &= 1156 = 2h + 2\alpha + \beta \\ 545 + 1459 &= 2004 = 2h + 2\beta + \alpha,\end{aligned}$$

met als oplossingen

$$\hat{\alpha} = -942, \quad \hat{\beta} = -94, \quad \hat{h} = 1567.$$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Tabel 1: *Rechteroverschrijdingskans* $1 - \Phi(a) = P(Z \geq a)$ van de $N(0, 1)$ -variabele Z .

m	$p = 0.1$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabel 2: Rechter kritieke waarden $t_{m,p}$ van de t -verdeling met m vrijheidsgraden corresponderend met rechteroverschrijdingskans p : $P(T_m \geq t_{m,p}) = p$. De laatste rij geeft de rechter kritieke waarden van de $N(0, 1)$ verdeling: $t_{\infty,p} = z_p$.

m	$\alpha = 0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.8
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.2	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
100	67.3	70.0	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabel 3: Right critical values $\chi_p^2(m)$ of the χ^2 -distribution with m degrees of freedom corresponding to right tail probability p : $P(\chi^2(m) \geq \chi_p^2(m)) = p$.