| | |
|---|---|
| Radboud Universiteit Nijmegen | Heyendaalseweg 135 |
| Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica | 6525 AJ Nijmegen |



| | |
|---|---|
| Tentamen | **11-01-2021** |
| **Statistiek (NWI-WB106)** | **8:30-11:30** |

Het is toegestaan een (grafische) rekenmachine te gebruiken en het bijgeleverde formuleblad. Het is *niet* toegestaan een boek, aantekeningen, telefoons of apparaten met internetverbinding te gebruiken.

1. Een machine vult zakken met rijst. De hoeveelheid per zak is normaal verdeeld met verwachting $\mu$ en variantie $\sigma^2$. De zakken zouden 5 kg rijst moeten bevatten. Meneer De Lange Muur (die deze zakken vaak koopt) denkt dat er te weinig rijst in de zakken zit. Hij weegt nauwkeurig de rijst uit 25 zakken en vindt een gemiddelde van 4.97 kg, met een steekproefstandaarddeviatie van 0.05 kg.

   (a) Heeft meneer De Lange Muur gelijk? Geef de juiste nulhypothese en alternatieve hypothese en voer de toets uit met $\alpha = 0.05$. Geef ook een (zo scherp mogelijke) onder- en bovengrens voor de $p$-waarde met behulp van de meegeleverde tabellen.

   (b) Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor $\mu$.

2. Bert en Ernie spelen stennis. Dit spel bestaat uit $n$ games, en elke game bestaat uit twee slagen. In een game krijg je 4 punten als je beide slagen wint, 1 punt als je precies één slag wint en 0 punten als je beide slagen verliest. Neem aan dat Bert elke slag met kans $p$ wint, onafhankelijk van andere slagen.

   (a) Zij $X_i$ het aantal punten van Bert in game $i$. Bepaal de Bayes schatter $\hat{p}$ voor $p$ als functie van $X_1, \ldots, X_n$. Neem hierbij een uniforme a priori verdeling.
   Hint: laat eerst zien dat de kansverdeling van $X_i$ voldoet aan

   $$\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{3}\left(7 - (k-2)^2\right)\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{6}k(7-k)} \cdot (1-p)^2, \qquad k = 0, 1, 4.$$

   (b) Bepaal de onzuiverheid (bias) van de schatter $\hat{p}$.
   (Als (a) niet gelukt is, neem dan $\hat{p} = \frac{1}{12(n-2)} \sum_{i=1}^{n} X_i(7 - X_i)$.)

3. Men wil een grootheid $Y$ voorspellen op basis van $x$. De volgende experimentele gegevens zijn beschikbaar voor $i = 1, \ldots, 7$:

| $x_i$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 0.1 | 7.3 | 10.4 | 10.5 | 8.9 | 6.0 | 1.6 |

Als model kiest men $Y = \alpha + \beta x^2 + \varepsilon$, met $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Schat de parameters $\alpha$ en $\beta$ in dit model. U mag gebruiken dat

$$\sum Y_i = 44.8, \qquad \sum x_i^2 = 28, \qquad \sum x_i^2 Y_i = 87.8,$$

$$\sum Y_i^2 = 389.48, \qquad \sum x_i^4 = 196.$$

4. Bij supermarkt PLUS kun je kaartjes sparen. Er zijn $n$ verschillende kaartjes, met $n$ onbekend. Elke keer als je een kaartje ontvangt is dit een uniforme trekking uit $\{1, \ldots, n\}$. Nadat we $k$ kaartjes ontvangen hebben, willen we toetsen $H_0 : n = n_0$. Als toetsingsgrootheid nemen we het hoogste nummer $X_{(k)}$ en als kritiek gebied

$$K = \{X : X_{(k)} \leq c \quad \text{of} \quad X_{(k)} > n_0\},$$

waarbij $c$ een nader te bepalen getal is.

   (a) Neem $n_0 = 99$, $\alpha = 0.05$ en laat zien dat $c = n_0 \cdot \alpha^{1/k}$ een geschikte keuze is.

   (b) Bepaal voor $n \geq n_0$ het onderscheidend vermogen van deze toets. Als in werkelijkheid $n = 100$, hoeveel kaartjes moeten we dan verzamelen zodat de kans op verwerpen van $H_0$ ten minste 90% is?

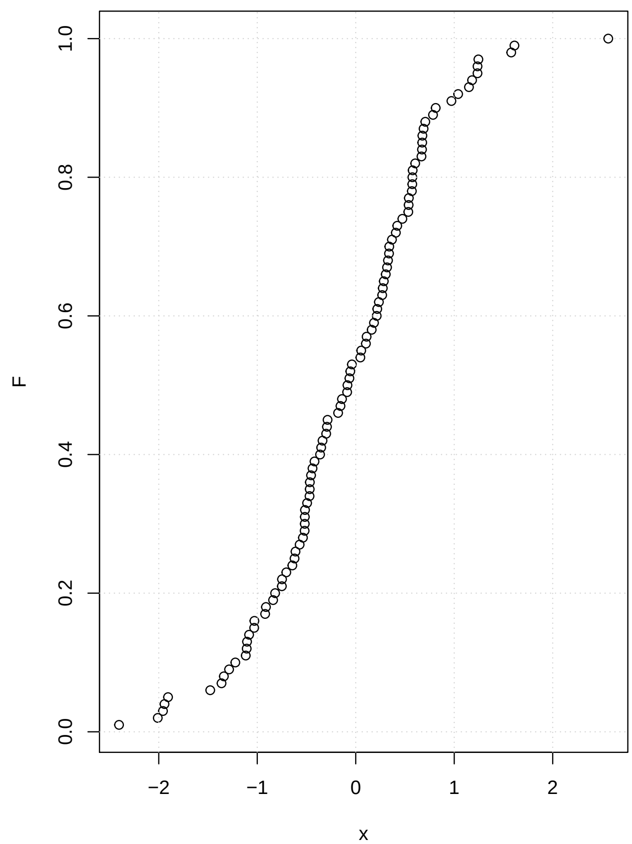
   (c) Lutgarde heeft al 21 kaartjes ontvangen, en haar hoogste nummer $X_{(21)}$ is 86. Bepaal de $p$-waarde bij de observatie van Lutgarde en trek uw conclusie.

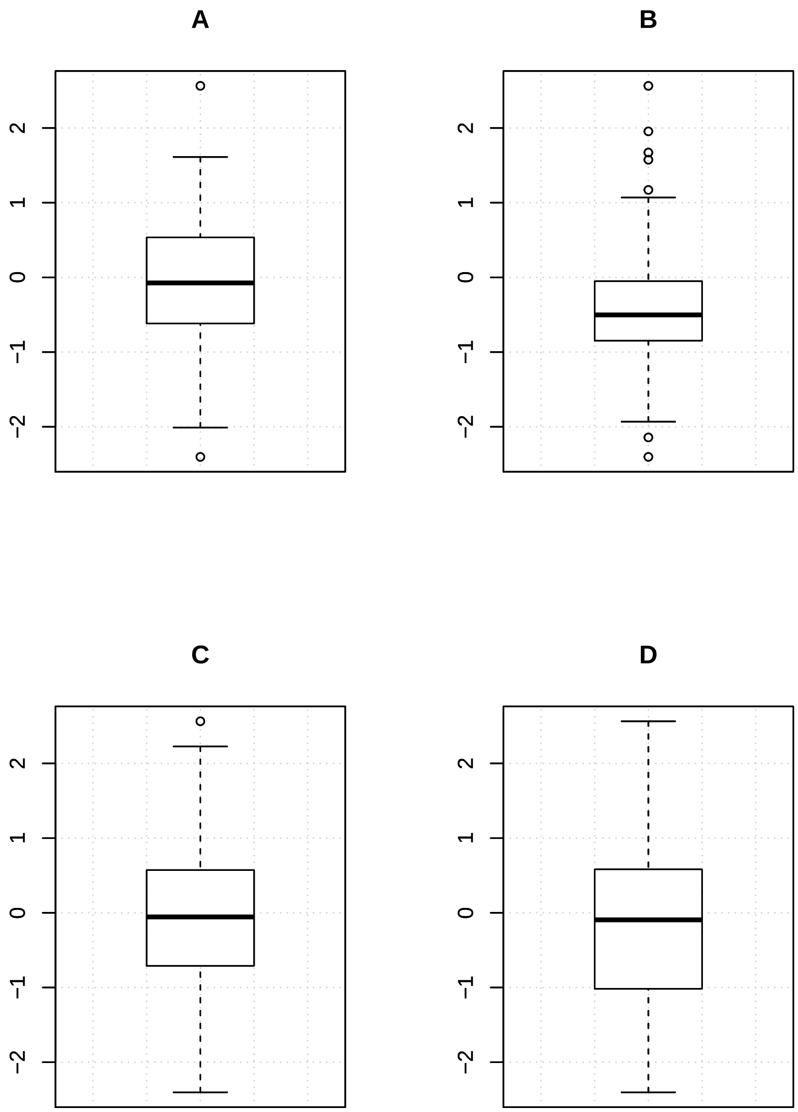
   (d) Bepaal een 95%-betrouwbaarheidsgebied voor $n_0$ op basis van de observatie van Lutgarde.

floor = 97, k = 147,. . . , 295. sol = k 228.155

5. Van een dataset $x_1, \ldots, x_{100}$ hebben we de empirische verdelingsfunctie $F$ bepaald. In de bijgaande plot ziet u de punten $(x_i, F(x_i))$ voor $i = 1, \ldots, 100$. Op de volgende pagina ziet u vier boxplots. Welke zou kunnen horen bij deze dataset? Geef voor de drie andere boxplots een duidelijke reden waarom ze *niet* bij de dataset horen.

**Empirische verdelingsfunctie**






EINDE

Puntenverdeling volgens onderstaande tabel.

| Opgave | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gratis | Totaal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punten | 20 | 20 | 20 | 20 | 10 | 10 | 100 |

Indien u ten minste 50 punten scoort, dan is uw eindcijfer het afgeronde gemiddelde van het tentamencijfer en het cijfer voor de inleveropgaven.
Indien u minder dan 50 punten scoort, dan is uw afgeronde tentamencijfer uw eindcijfer.

## Formuleblad bij Statistiek

N.B.: Dit blad is niet een samenvatting of overzicht, en dient slechts als hulpmiddel.

### Kansverdelingen

1. **Alternatieve of Bernoulli verdeling**: $\mathrm{Alt}(p)$ of $\mathrm{Ber}(p)$.

   $\mathrm{P}(X=1)=p$ en $\mathrm{P}(X=0)=1-p$. EX$=p$; Var$(X)=p(1-p)$.

2. **Binomiale verdeling**: $\mathrm{Bin}(n,p)$.

   $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ voor $k=0,1,\ldots,n$. EX$=np$; Var$(X)=np(1-p)$.

3. **Geometrische verdeling** : $\mathrm{Geo}(p)$.

   $\mathrm{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ voor $k=1,2,\ldots$. EX$=1/p$; Var$(X)=(1-p)/p^2$.

4. **Poisson-verdeling**: $\mathrm{Pois}(\mu)$.

   $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ voor $k=0,1,\ldots$. EX$=\mu$; Var$(X)=\mu$.

5. **Exponentiële verdeling**: $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

   $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ en $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ voor $x\geq 0$. EX$=1/\lambda$; Var$(X)=1/\lambda^2$.

6. **Homogene of Uniforme verdeling** op $[a,b]$: $\mathrm{hom}[a,b]$ of $U(a,b)$.

   $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ en $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ voor $a\leq x\leq b$. EX$=\frac{1}{2}(a+b)$; Var$(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$.

7. **Normale verdeling**: $N(\mu,\sigma^2)$.

   $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ en $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}dt$. EX$=\mu$; Var$(X)=\sigma^2$.

8. **Gamma verdeling**: $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ $(\alpha,\lambda>0)$.

   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}1_{[0,\infty)}(x)$ met $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$. EX$=\alpha/\lambda$; Var$(X)=\alpha/\lambda^2$.

9. **Beta verdeling**: $B_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$.

   $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}1_{[0,1]}(x)$ met $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$.

   EX$=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$; Var$(X)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

10. **Chikwadraat-verdeling**: $\chi^2_n$ $(n\geq 1)$.

    Als $Z_1,\ldots,Z_n\sim N(0,1)$ i.i.d. en $X=\sum_{i=1}^n Z_i^2$, dan $X\sim\chi^2_n$. EX $=n$; Var$(X)=2n$.

11. ***t*-verdeling of Student-verdeling**: $t_n$ $(n\geq 1)$.

    Als $Z\sim N(0,1)$ en $Y\sim\chi^2_n$ onafhankelijk en $X=\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$, dan $X\sim t_n$.

    EX $=0$ voor $n\geq 2$; Var$(X)=\frac{n}{n-2}$ voor $n\geq 3$.

12. ***F*-verdeling**: $F_{m,n}$ $(m,n\geq 1)$.

    Als $Y\sim\chi^2_m$ en $Z\sim\chi^2_n$ onafhankelijk, en $X=\frac{Y/m}{Z/n}$, dan $X\sim F_{m,n}$.

    EX $=\frac{n}{n-2}$ voor $n\geq 3$; Var$(X)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ voor $n\geq 5$.

## Covariantie en correlatie

1. Definitie covariantie: $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$.
   Eigenschappen: $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$, $\mathrm{Cov}\,(rX+s, tY+u) = rt\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)$.
2. Definitie correlatiecoëfficiënt: $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}\sqrt{\mathrm{Var}\,(Y)}}$.
   Schatter (steekproefcorrelatiecoëfficiënt):
   $$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i-\overline{Y})^2}}$$
3. $\mathrm{Var}\,(X+Y) = \mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Var}\,(Y) + 2\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)$.

## Empirische verdelingsfunctie

Voor een dataset van $n$ elementen: $F_n(x) = \dfrac{\text{aantal elementen in de dataset } \leq x}{n}$.

## Centrale limietstelling

Als $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochasten is met alle dezelfde verdeling en met verwachting $\mu$ and variantie $\sigma^2$, dan geldt:

**Centrale limietstelling**:
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq a\right) = \mathrm{P}\,(Z \leq a)\,,$$
waarbij $Z$ een $N(0,1)$ verdeling heeft.

## Locatie-schaal families

De locatie-schaal familie van dichtheden behorende bij een dichtheid $f$, wordt gegeven door
$$\left\{ f_{a,\lambda}(\cdot) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\cdot - a}{\lambda}\right) \mid a \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \right\}.$$
Als $Z \sim f$ en $X = \lambda Z + a$, dan $X \sim f_{a,\lambda}$.

## Kwantielen

Het $\alpha$-onderkwantiel van een stochast $X$ met verdelingsfunctie $F$ wordt gedefinieerd als
$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}\,(X \leq x) \geq \alpha\}.$$
Als $X = \lambda Z + a$, dan $F_X^{-1}(\alpha) = \lambda F_Z^{-1}(\alpha) + a$. Voor een dataset $x_1, \ldots, x_n$ schatten we het $\alpha$-onderkwantiel $\hat{x}_\alpha$ door $k = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor$, $\eta = \alpha(n+1) - k$ en $\hat{x}_\alpha = (1-\eta)x_{(k)} + \eta x_{(k+1)}$.

## Schatters

De onzuiverheid (bias) van een schatter $T$ voor $\theta$: $ET - \theta$.
Als $T_1$ en $T_2$ zuivere schatters voor $\theta$ zijn, dan heet $T_2$ efficiënter dan $T_1$ als $\mathrm{Var}\,(T_2) < \mathrm{Var}\,(T_1)$.
De 'mean squared error' van een schatter $T$ voor $\theta$: $\mathrm{MSE}(T) = E(T-\theta)^2$.
Eigenschap: $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}\,(T) + (ET-\theta)^2$.

### Gestandaardiseerd en gestudentiseerd steekproefgemiddelde

Als $X_i$ een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling hebben voor $i = 1, \ldots, n$, en onafhankelijk zijn, dan hebben

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{en} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$$

een $N(0, 1)$, respectievelijk $t(n-1)-$verdeling. Hierbij is $t(n-1)$ de $t$-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden. Verder geldt

$$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

### Twee steekproeven

Bij de twee steekproeven $t$-toets:

Gelijke varianties: $S_p^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)$.

Ongelijke varianties: $S_d^2 = \dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}$.

### Likelihood-ratiotoets

Zij $X \sim p_\theta$. De likelihood-ratiotoetsingsgrootheid voor $H_0 : \theta \in \Theta_0$ is

$$\lambda_n(X) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p_\theta(X)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(X)} = \frac{p_{\hat{\theta}}(X)}{p_{\hat{\theta}_0}(X)}.$$

Onder gladheidsvoorwaarden geldt voor $n \to \infty$, $k = \dim(\Theta)$ en $k_0 = \dim(\Theta_0)$

$$2\log(\lambda_n(X)) \xrightarrow{d} \chi^2_{k-k_0}.$$

### Betrouwbaarheidsgebieden

Zij $X \sim p_\theta$. Een gebied $G_X \subseteq \Theta$ is een $(1-\alpha)$-betrouwbaarheidsgebied voor $\theta$ als

$$\mathbb{P}_\theta(G_X \ni \theta) \geq 1 - \alpha, \qquad \text{voor alle } \theta \in \Theta.$$

### Score-functie, Fisher-informatie en maximum likelihood-schatter

Zijn $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. met $X_1 \sim p_\theta$. De score-functie is $\dot{l}_\theta(x) := \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta(x)$. De Fisher-informatie is $i_\theta = \mathrm{Var}_\theta(\dot{l}_\theta(X_1))$. $(= -\mathbb{E}[\ddot{l}_\theta(X_1)]$ onder regulariteitseisen)

Zij $\hat{\theta}_n$ de maximum-likelihood schatter voor $\theta$. Onder gladheidsvoorwaarden geldt voor $n \to \infty$

$$\sqrt{n i_\theta}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

### Lineaire regressie

Enkelvoudig model: $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, met $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Schatters (mle):

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x} \qquad \hat{\beta} = \frac{S_Y}{s_x} r_{x,Y}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2.$$

Meervoudig model: $Y = X\beta + \varepsilon$, met $Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n, X \in \mathbb{R}^{n \times p}, \beta \in \mathbb{R}^p$ en $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Schatters (mle):

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\|Y - X\hat{\beta}\|^2.$$

**Volledige oplossingen:**

**1a** Meneer De Lange Muur voert het experiment uit en wil graag aantonen dat er te weinig in de zakken zit. Daarom moet dat de alternatieve hypothese zijn, dus

$$H_0 : \mu \geq 5, \qquad H_1 : \mu < 5.$$

Toetsingsgrootheid:

$$T = \frac{\overline{X} - 5}{S_n/\sqrt{25}} = -3.$$

Onder $H_0$ heeft $T$ een $t(24)$-verdeling. We verwerpen alleen als het gemiddelde te klein is, dus voor negatieve $T$. De kritieke waarde ligt bij -1.711 (zie tabel), dus $H_0$ wordt verworpen, wat betekent dat meneer De Lange Muur inderdaad gelijk heeft. Uit de tabel halen we ook dat onder $H_0$ geldt

$$\mathbb{P}(T < -2.797) = 0.005, \qquad \mathbb{P}(T < -3.091) = 0.0025.$$

De $p$-waarde ligt ergens hier tussen.

**1b** Er geldt nog steeds

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_n/\sqrt{25}} \sim t(24).$$

Hieruit volgt met behulp van de tabel

$$\mathbb{P}(-2.064 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S_n/\sqrt{25}} \leq 2.064) = 0.95.$$

Herschrijven geeft

$$\mathbb{P}(\overline{X} - 2.064\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 2.064\frac{S_n}{\sqrt{n}}) = 0.95.$$

Een 95%-betrouwbaarheidsinterval is dus $[4.949; 4.991]$. (Men kan ook een eenzijdig interval maken: $(-\infty; 4.987]$ of $[4.953; \infty)$.)

**2a** Er geldt

$$\mathbb{P}(X_i = 4) = p^2, \qquad \mathbb{P}(X_i = 1) = 2p(1-p), \qquad \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^2.$$

Als we $k = 0, 1$ en $4$ invullen in de gegeven formule, dan zien we dat die formule inderdaad hieraan voldoet.

Nu kunnen we de likelihoodfunctie bepalen:

$$L(p; X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\left(7 - (X_i - 2)^2\right)\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{6}X_i(7-X_i)} \cdot (1-p)^2.$$

De a priori verdeling is uniform, dus heeft dichtheid $\pi(p) = 1$ voor $0 \leq p \leq 1$. De a posteriori verdeling $f_{P|X}(p)$ voldoet dan aan

$$\begin{aligned} f_{P|X}(p) &\propto \pi(p) \cdot L(p; X) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{6}X_i(7-X_i)} \cdot (1-p)^2 \\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{6}\sum X_i(7-X_i)} \cdot (1-p)^{2n} \\ &= p^{\frac{1}{6}\sum X_i(7-X_i)} \cdot (1-p)^{2n - \frac{1}{6}\sum X_i(7-X_i)}, \end{aligned}$$

voor $0 \leq p \leq 1$. Dit herkennen we als een Beta verdeling met parameters

$$\alpha = 1 + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} X_i(7 - X_i), \qquad \beta = 1 + 2n - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} X_i(7 - X_i).$$

De Bayes schatter $\hat{p}$ voor $p$ is de verwachting van de a posteriori verdeling, dus

$$\hat{p} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1 + \frac{1}{6}\sum X_i(7 - X_i)}{2 + 2n} = \frac{1}{2 + 2n} + \frac{1}{12 + 12n}\sum_{i=1}^{n} X_i(7 - X_i).$$

**2b** Om de onzuiverheid van deze schatter te bepalen, merken we eerst op dat

$$\mathbb{E}[X_i] = 4p^2 + 2p(1 - p), \qquad \mathbb{E}[X_i^2] = 16p^2 + 2p(1 - p).$$

De verwachting van de schatter is nu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{p}] &= \frac{1}{2 + 2n} + \frac{1}{12(n + 1)}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[7X_i - X_i^2] \\
&= \frac{1}{2 + 2n} + \frac{n}{12(n + 1)}(28p^2 + 14p(1 - p) - 16p^2 - 2p(1 - p)) \\
&= \frac{1}{2 + 2n} + \frac{np}{n + 1} = \frac{np + \frac{1}{2}}{n + 1}.
\end{aligned}$$

De onzuiverheid is dus

$$\mathbb{E}[\hat{p}] - p = \frac{np + \frac{1}{2}}{n + 1} - p = \frac{np + \frac{1}{2} - (n + 1)p}{n + 1} = \frac{\frac{1}{2} - p}{n + 1}.$$

**3** De onafhankelijke variabele $x^2$ noemen we $v$. Er geldt

$$\overline{Y} = 44.8/7 = 6.4, \qquad \overline{v} = 28/7 = 4.$$

Verder geldt

$$\begin{aligned}
S_Y^2 &= \frac{1}{6}\sum(Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{1}{6}\sum(Y_i^2 - 2Y_i\overline{Y} + \overline{Y}^2) \\
&= \frac{1}{6}\sum(Y_i^2 - \overline{Y}^2) = \frac{1}{6}(389.48 - 7 * 6.4^2) = 17.13. \\
s_v^2 &= \frac{1}{6}\sum(v_i^2 - \overline{v}^2) = \frac{1}{6}\sum(x_i^4 - 16) = \frac{1}{6}(196 - 7 * 16) = 14. \\
r_{v,Y} &= \frac{\sum(v_i - \overline{v})(Y_i - \overline{Y})}{6 * S_Y s_v} = \frac{\sum(v_iY_i - \overline{v}\overline{Y})}{6 * S_Y s_v} = \frac{87.8 - 7 * 4 * 6.4}{6 * \sqrt{17.13 * 14}} = -0.98.
\end{aligned}$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{S_Y}{s_v} r_{v,Y} = \sqrt{\frac{17.13}{14}} * -0.98 = -1.09, \\
\hat{\alpha} &= \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{v} = 10.75.
\end{aligned}$$

**4a** Onder de nulhypothese moet gelden $\mathbb{P}_{H_0}(X \in K) \leq \alpha$. Merk op dat

$$\mathbb{P}_{H_0}(X \in K) = \mathbb{P}_{H_0}(X_{(k)} \leq c) = \mathbb{P}(X_1 \leq c)^k = \left(\frac{\lfloor c \rfloor}{n_0}\right)^k \leq \left(\frac{c}{n_0}\right)^k.$$

Stellen we dit gelijk aan $\alpha$, dan vinden we een $c$ die voldoet:

$$c = n_0 \cdot \alpha^{1/k} = 99 \cdot 0.05^{1/k}.$$

**4b** Het onderscheidend vermogen is de kans om $H_0$ te verwerpen als functie van $n$. Deze kans voldoet aan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n(X \in K) &= \mathbb{P}_n(X_{(k)} \leq c) + \mathbb{P}_n(X_{(k)} > n_0) \\ &= \left(\frac{\lfloor c \rfloor}{n}\right)^k + 1 - \mathbb{P}_n(X_{(k)} \leq n_0) = \left(\frac{\lfloor n_0 \cdot \alpha^{1/k} \rfloor}{n}\right)^k + 1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^k.\end{aligned}$$

Dit is een stijgende functie van $k$. Als we de afronding zouden verwaarlozen is dit gelijk aan $1 + (\alpha - 1)\left(\frac{n_0}{n}\right)^k$. Invullen van $\alpha = 0.05$, $n_0 = 99$ en $n = 100$ en gelijkstellen aan 0.9 geeft een vergelijking voor $k$:

$$1 - 0.95 \cdot 0.99^k = 0.9,$$

met als oplossing

$$k = \frac{\log(0.1/0.95)}{\log(0.99)} = 224.002.$$

Er zijn dus minstens 225 kaartjes nodig.

(Stel nu dat we de afronding niet verwaarlozen. Dan zal de oplossing nog steeds in de buurt van 225 liggen. Er geldt $\lfloor n_0 \cdot \alpha^{1/225} \rfloor = \lfloor 99 \cdot 0.05^{1/225} \rfloor = 97$. We bepalen nu alle $k$ waarvoor geldt dat $\lfloor n_0 \cdot \alpha^{1/225} \rfloor = 97$. Dit is het geval voor

$$\frac{\log(0.05)}{\log(97/99)} \leq k \leq \frac{\log(0.05)}{\log(98/99)},$$

dus voor $k = 147, \ldots, 295$. Vul 97 in, de vergelijking voor $k$ wordt $\left(\frac{97}{100}\right)^k + 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^k = 0.9$, met als oplossing $k = 228.155$. Deze $k$ voldoet aan $147 \leq k \leq 295$. Er zijn dus minstens 229 kaartjes nodig.)

**4c** De $p$-waarde is

$$\mathbb{P}_{H_0}(X_{(21)} \leq 86) = \left(\frac{86}{99}\right)^{21} = 0.052.$$

De nulhypothese wordt (net) niet verworpen. Hoewel de toets tweezijdig is, vermenigvuldigen we die kans *niet* met 2, omdat alle kansmassa onder $H_0$ in het linkerdeel van $K$ zit. Dit is consistent met het feit dat $c = 99 \cdot 0.05^{1/21} \approx 85.8$. De observatie ligt dus net niet in $K$.

**4d** Een betrouwbaarheidsinterval wordt gevormd door die waarden van $n_0$ waarvoor de nulhypothese niet verworpen zou worden. Voor $n_0 \geq 100$ zou de $p$-waarde kleiner dan of gelijk zijn aan $0.86^{21} \approx 0.042 < 0.05$. Voor $n_0 \leq 85$ wordt $H_0$ zeker verworpen. Voor alle tussenliggende waarden wordt $H_0$ niet verworpen. Het betrouwbaarheidsgebied is dus $\{86, 87, \ldots, 98, 99\}$.

Men kan ook in termen van het kritieke gebied hier naar kijken. Het kritieke gebied voor $X_{(k)}$ is

$$\left\{1, 2, \ldots, n_0 \cdot \alpha^{1/k}, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\right\}.$$

De vraag is nu: voor welke $n_0$ ligt 86 hier *niet* in? Dan moet gelden $n_0 \cdot \alpha^{1/k} < 86 < n_0 + 1$. Dus $n_0 \geq 86$ en $n_0 < 86/0.05^{1/21} \approx 99.18$. Dit geeft hetzelfde gebied $\{86, 87, \ldots, 98, 99\}$.

**5** De mediaan van de dataset zit dicht bij 0, dus B valt af. In de dataset zit slechts 1 waarde groter dan 2, dus C valt af. Het eerste kwartiel van de dataset is duidelijk groter dan -1, dus D valt af. Derhalve blijft alleen A over.

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 5000 | 4960 | 4920 | 4880 | 4840 | 4801 | 4761 | 4721 | 4681 | 4641 |
| 0.1 | 4602 | 4562 | 4522 | 4483 | 4443 | 4404 | 4364 | 4325 | 4286 | 4247 |
| 0.2 | 4207 | 4168 | 4129 | 4090 | 4052 | 4013 | 3974 | 3936 | 3897 | 3859 |
| 0.3 | 3821 | 3783 | 3745 | 3707 | 3669 | 3632 | 3594 | 3557 | 3520 | 3483 |
| 0.4 | 3446 | 3409 | 3372 | 3336 | 3300 | 3264 | 3228 | 3192 | 3156 | 3121 |
| 0.5 | 3085 | 3050 | 3015 | 2981 | 2946 | 2912 | 2877 | 2843 | 2810 | 2776 |
| 0.6 | 2743 | 2709 | 2676 | 2643 | 2611 | 2578 | 2546 | 2514 | 2483 | 2451 |
| 0.7 | 2420 | 2389 | 2358 | 2327 | 2296 | 2266 | 2236 | 2206 | 2177 | 2148 |
| 0.8 | 2119 | 2090 | 2061 | 2033 | 2005 | 1977 | 1949 | 1922 | 1894 | 1867 |
| 0.9 | 1841 | 1814 | 1788 | 1762 | 1736 | 1711 | 1685 | 1660 | 1635 | 1611 |
| 1.0 | 1587 | 1562 | 1539 | 1515 | 1492 | 1469 | 1446 | 1423 | 1401 | 1379 |
| 1.1 | 1357 | 1335 | 1314 | 1292 | 1271 | 1251 | 1230 | 1210 | 1190 | 1170 |
| 1.2 | 1151 | 1131 | 1112 | 1093 | 1075 | 1056 | 1038 | 1020 | 1003 | 0985 |
| 1.3 | 0968 | 0951 | 0934 | 0918 | 0901 | 0885 | 0869 | 0853 | 0838 | 0823 |
| 1.4 | 0808 | 0793 | 0778 | 0764 | 0749 | 0735 | 0721 | 0708 | 0694 | 0681 |
| 1.5 | 0668 | 0655 | 0643 | 0630 | 0618 | 0606 | 0594 | 0582 | 0571 | 0559 |
| 1.6 | 0548 | 0537 | 0526 | 0516 | 0505 | 0495 | 0485 | 0475 | 0465 | 0455 |
| 1.7 | 0446 | 0436 | 0427 | 0418 | 0409 | 0401 | 0392 | 0384 | 0375 | 0367 |
| 1.8 | 0359 | 0351 | 0344 | 0336 | 0329 | 0322 | 0314 | 0307 | 0301 | 0294 |
| 1.9 | 0287 | 0281 | 0274 | 0268 | 0262 | 0256 | 0250 | 0244 | 0239 | 0233 |
| 2.0 | 0228 | 0222 | 0217 | 0212 | 0207 | 0202 | 0197 | 0192 | 0188 | 0183 |
| 2.1 | 0179 | 0174 | 0170 | 0166 | 0162 | 0158 | 0154 | 0150 | 0146 | 0143 |
| 2.2 | 0139 | 0136 | 0132 | 0129 | 0125 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 |
| 2.3 | 0107 | 0104 | 0102 | 0099 | 0096 | 0094 | 0091 | 0089 | 0087 | 0084 |
| 2.4 | 0082 | 0080 | 0078 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0068 | 0066 | 0064 |
| 2.5 | 0062 | 0060 | 0059 | 0057 | 0055 | 0054 | 0052 | 0051 | 0049 | 0048 |
| 2.6 | 0047 | 0045 | 0044 | 0043 | 0041 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 |
| 2.7 | 0035 | 0034 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 |
| 2.8 | 0026 | 0025 | 0024 | 0023 | 0023 | 0022 | 0021 | 0021 | 0020 | 0019 |
| 2.9 | 0019 | 0018 | 0018 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 |
| 3.0 | 0013 | 0013 | 0013 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 |
| 3.1 | 0010 | 0009 | 0009 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 |
| 3.2 | 0007 | 0007 | 0006 | 0006 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 |
| 3.3 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 |
| 3.4 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 |

Tabel 1: *Rechteroverschrijdingskans* $1 - \Phi(a) = P(Z \geq a)$ *van de* $N(0,1)$*-variabele* $Z$.

| $m$ | $p = 0.1$ | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 127.321 | 318.309 | 636.619 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.089 | 22.327 | 31.599 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.215 | 12.924 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.029 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 | 3.485 | 3.768 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.091 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 | 3.307 | 3.551 |
| 50 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 2.937 | 3.261 | 3.496 |
| $\infty$ | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 2.807 | 3.090 | 3.291 |

Tabel 2: *Rechter kritieke waarden $t_{m,p}$ van de $t$-verdeling met $m$ vrijheidsgraden corresponderend met rechteroverschrijdingskans $p$: $P(T_m \geq t_{m,p}) = p$. De laatste rij geeft de rechter kritieke waarden van de $N(0,1)$ verdeling: $t_{\infty,p} = z_p$.*

| $m$ | $\alpha = 0.995$ | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.90 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.8 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |
| 40 | 20.7 | 22.2 | 24.4 | 26.5 | 29.1 | 51.8 | 55.8 | 59.3 | 63.7 | 66.8 |
| 50 | 28.0 | 29.7 | 32.4 | 34.8 | 37.7 | 63.2 | 67.5 | 71.4 | 76.2 | 79.5 |
| 60 | 35.5 | 37.5 | 40.5 | 43.2 | 46.5 | 74.4 | 79.1 | 83.3 | 88.4 | 92.0 |
| 70 | 43.2 | 45.4 | 48.8 | 51.7 | 55.3 | 85.5 | 90.5 | 95.0 | 100.4 | 104.2 |
| 100 | 67.3 | 70.0 | 74.2 | 77.9 | 82.4 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 |

Tabel 3: Right critical values $\chi^2_p(m)$ of the $\chi^2$-distribution with $m$ degrees of freedom corresponding to right tail probability $p$: $\mathrm{P}\left(\chi^2(m) \geq \chi^2_p(m)\right) = p$.