Naam (voornaam, achternaam):____

Student number:____

Zet je naam op alle bladzijdes (liefst nu!) voor het geval ze loslaten.

Zet je antwoorden op dit examenpapier, direct na de vraag is ruimte daaarvoor. Gebruik extra papier alleen als je geen ruimte hebt voor je antwoord (en voeg het toe aan je tentamen). Je hebt recht op kladpapier.

Opgave:	1 [8pt]	2 [10pt]	3 [8pt]	4 [8pt]	5 [5pt]	6 [6pt]	Total [45pt]
Score :							

45 punten is een 10,
0 punten is een 1,
en daartussen loopt het lineair. Dus cijfer is

$$\frac{\text{punten}}{45} \cdot 9 + 1.$$

Je hebt minimaal een 5 nodig (20 punten) voordat je huiswerkcijfer meetelt. Een cijfer van 5.5 of hoger is een voldoende. (Deze grens is hard - een 5.49999 is niet gehaald.)

Opgave 1. Schrijf als $a + bi$ waar $a, b \in \mathbb{R}$. Geef een exact antwoord, geen benadering.
a) [4]
$$2^{2+i}$$
b) [4]
$$(-1 + \sqrt{3}i)^{12}$$

a)

$$2^{2+i} = 2^2 \cdot 2^i = 4 \cdot (e^{\ln(2)})^i = 4 \cdot e^{i\ln(2)} = 4\cos(\ln(2)) + 4\sin(\ln(2))i.$$

b)
$$-1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$
Omdat $(e^{\frac{2\pi}{3}i})^3 = 1$ wordt de berekening gemakkelijk:
$$= 2^{12}(e^{\frac{2\pi}{3}i})^{12} = 4096.$$

(Extra ruimte opgave 1)

Opgave 2. Geef een primitieve naar x :

a) [5]

$$\frac{20}{(x^2+4)(x+4)}$$

waar gegeven is dat $1 > x > 0$.

b) [5]

$$\frac{\ln(x)\sqrt{1+\ln(x)^2}}{x}$$

waar gegeven is dat $x > 0$.

a) Schrijf

$$\frac{20}{(x^2+4)(x+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+4}$$

en los op: dit geeft uiteindelijk $A = -1, B = 4, C = 1$. De integraal van $\frac{-x+4}{x^2+4}$ benodigt $\ln(x^2+4)$ en $\arctan(\frac{x}{2})$. Na wat puzzelen krijg je als primitieve :

$$= \frac{-1}{2}\ln\left(x^2+4\right) + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(x^2+4).$$

Merk op dat omdat $x > -4$ er geen absolute waarden om x+4 hoeven te staan in de ln, en ook dat $\arctan(x)$ gedefinieerd is op het interval $1 > x > 0$.

b) Substitueer $u = \ln(x)$, dan $du = \frac{1}{x}dx$ dus

$$\int \frac{\ln(x)\sqrt{1+\ln(x)^2}}{x}dx = \int u\sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(1+(\ln(x))^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(Extra ruimte opgave 2)

Opgave 3. [8] Bepaal de limiet van n naar oneindig, of bewijs dat deze niet bestaat, van de rij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, waar $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{8a_n^2+25}$ voor $n \in \mathbb{N}^*$.

Is de rij stijgend? Dat bewijs ik met inductie:
(1) $a_2 = \frac{1}{3}\sqrt{33} > 1 = a_1$.
(2) Stel $a_n > a_{n-1}$. Dan $a_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{8a_n^2+25} > \frac{1}{3}\sqrt{8a_{n-1}^2+25} = a_n$.
(3) m.b.v. inductie: a_n stijgend.

(Op een kladpapiertje reken ik uit wat de oplossing is van $a = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+25}$, dat levert op $a = 5$ of $a = -5$, zie beneden. Aangezien de rij stijgend is zal de limiet dus wel 5 worden, dus naar dat antwoord werken we toe.)

Is a_n begrensd door 5? Dat ga ik bewijzen met inductie.
(1) $a_1 = 1 < 5$.
(2) Stel $a_n < 5$. Dan $a_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{8a_n^2+25} < \frac{1}{3}\sqrt{8\cdot 5^2+25} = \frac{1}{3}\sqrt{9\cdot 25} = 5$.
(3) m.b.v. inductie: $a_n < 5$ alle $n \in \mathbb{N}^*$.

De rij is dus begrensd en stijgend, dus de limiet bestaat. Noem die a. Dan

$$a = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{3}\sqrt{8a_n^2+25} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} 8a_n^2+25\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{8a^2+25}$$

en als je nu deze vergelijking naar a oplost krijg je $a = 5$ of $a = -5$. Die laatst kan niet, dus $a = 5$.

(Extra ruimte opgave 3)

Opgave 4. Bereken:

a) [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}.$$

b) [5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n)!}.$$

a) Het is een som van faculteiten, dus het zal wel iets met e^x te maken hebben. Je hebt echter alleen de even termen $(2n)!$ in plaats van $n!$. Beetje hannesen laat je inzien dat je b.v. $e^x - e^{-x}$ zou kunnen bekijken. Dan krijg je $\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ omdat de oneven termen wegvallen. Delen door 2 geeft je... ohja, $\sinh(x)$! (Dat hoef je niet te gebruiken in deze opgave, er hoeft geen sinh noch cosh voor te komen.) Dus als je nu 1 invult krijg je de som, en dat is $\sinh(1) = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$.

b) Je hebt dus

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sinh(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{n}$$

Afgeleide nemen geeft je de juiste term (je kunt hierbij $\sinh(x)$ laten staan of uitschrijven in zijn definitie).

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\cosh(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n)!}x^{n-1}.$$

Nu $x = 1$ invullen:

$$\frac{1}{2}\cosh(1) = \frac{1}{4}(e + e^{-1}).$$

(Extra ruimte opgave 4)

Opgave 5. [5] Geef alle oplossingen van de volgende differentiaalvergelijking:
$$y'' - 6y' + 9y = 18x^2 - 33x + 10.$$

Dit is een standaardopgave die ik niet helemaal uitwerk.
Stap (1) is de homogene vergelijking $y'' - 6y' + 9y = 0$ oplossen, dat geeft $Ae^{3x} + Bxe^{3x}$.
Stap (2) is een oplossing vinden, en dat doe je door $y = ax^2 + bx + c$ te gokken en op te lossen.
Stap (3) is deze oplossing bijelkaar optellen.
Je krijgt
$$Ae^{3x} + Bxe^{3x} + 2x^2 - x$$
waar $A, B \in \mathbb{R}$.

(Extra ruimte opgave 5)

Opgave 6. Bekijk de differentiaalvergelijking (die we niet echt gaan oplossen)

$$ay^2dx + 2yxdy = 0.$$

a) [3] Gegeven is dat deze vergelijking exact is. Bereken a.
b) [3] Laat zien dat voor elke $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ er een integrerende factor x^b bestaat (en bepaal b).

a) Er moet een functie $\Phi(x, y)$ zijn met $\Phi(x, y) = \int ay^2dx = \int 2yxdy$. Dus $axy^2 + f(y) = y^2 + g(x)$. Dus $a = 1$. Voor het geval het je interesseert: $\Phi(x, y) = xy^2 + C$.
Alternatief: er moet gelden $\frac{day^2}{dy} = \frac{d2yx}{dx}$ waaruit ook volgt dat $a = 1$.
b) Nu $\int ax^b y^2 dx = \int 2x \cdot x^b y dy$ dus

$$\frac{a}{b+1}x^{b+1}y^2 + C_1(y) = x^{b+1}y^2 + C_2(x)$$

waar G een primitieve van g is, C_1 en C_2 functies. Je ziet dat C_1 en C_2 constantes moeten zijn en $\frac{a}{b+1} = 1$, dus $b = a - 1$.

(Extra ruimte opgave 6)