

1a) Exc. 2.3 geeft $T(\mathbb{T}^2) \cong T(S^1) \times T(S^1)$

en Exc. 3.4 laat dan zien dat

$$\begin{aligned} T(S^1) \times T(S^1) &\cong S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R} \\ &\cong \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

b) Allereerst merken we op dat $F|_U$ een continue afbeelding is, aangezien de componenten producten van continue functies (sin en cos) zijn. Nu is $U \subseteq \mathbb{T}^2$ een dichtliggende deelverz. en dus breidt $F|_U$ uit tot een unieke continue afbeelding $F: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Om te laten zien dat F glad is, moet F in elke coördinaatrepresentatie een gladder afbeelding zijn.

Nu is $F|_U$ glad (producten sin en cos)

Een andere kaart $V \subseteq \mathbb{T}^2$ is gegeven door $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ en daarop is $F|_V$ gegeven door dezelfde formule als die van $F|_U$. (omdat $U \cap V \subseteq U$ dichtligt).

Dere is ook glad en dus zijn de coörd.
representaties van F glad voor de kaarten
 U, V , en dus t.o.v. de atlas die de
gladde structuur van $\mathbb{T}^2$ definieert.

$$(c) \quad dF_{(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}^1}{\partial s} & \frac{\partial \tilde{F}^1}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{F}^2}{\partial s} & \frac{\partial \tilde{F}^2}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{F}^3}{\partial s} & \frac{\partial \tilde{F}^3}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (\tilde{F} \equiv F|_U)$$

$$= \begin{pmatrix} -a \sin s \cos t & -(b+a \cos s) \sin t \\ -a \sin s \sin t & (b+a \cos s) \cos t \\ a \cos s & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad dF_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial \tilde{F}^1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{F}^2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{F}^3}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= -(b+a \cos s) \sin t \frac{\partial}{\partial x} + (b+a \cos s) \cos t \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

e) F is een immersie als dF ingeëliet is.

Dit gebeurt als de kolommen in $dF_{(s,t)}$ lin. onafh. zijn. $\forall s, t \in U$ (en in V maar zeldse berekening)

Stel $a < b$. Dan is $b + a \cos s \neq 0 \forall s$.

Dus: als $\cos s \neq 0$ zijn de kolommen lin. onafh.
en als $\cos s = 0$ dan is $\sin s = \pm 1$
en is

$$dF_{(s,t)} = \begin{pmatrix} -a \cos t & -b \sin t \\ -a \sin t & b \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deze twee kolommen staan loodrecht op elkaar en dus ook lin. onafh.

Stel nu $a = b$. Dan is $b + a \cos s = 0$ voor $s = \pi$. Dus

$$dF_{(\pi,t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

met rang 1, en dus niet ingeëliet.

Conclusie: F immersie desda $a < b$.

① Als $a = b$ dan is F geen immersie
en dus ook geen inbedding.

Als $a < b$ dan is $b + a \cos s > 0$.

Maar dan is voor $x, y, z \in \text{Im}(F)$:

$$x^2 + y^2 = (b + a \cos s)^2$$
$$\Rightarrow \cos s = \frac{1}{a} (\sqrt{x^2 + y^2} - b)$$

en ook $\sin s = \frac{1}{a} z$

Net zo volgt:
$$\begin{cases} \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin t = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Dus F is injectief voor alle $0 < a < b$.

en dan dus een inbedding met Prop. 4.22

2(a) Per definitie: voor $v_1, \dots, v_k \in T_h G$:

$$(L_g^* \omega)_h = (dL_g)_h^* (\omega_{L_g h})$$

$$= (dL_g)_h^* (\omega_{gh})$$

Dus $L_g^* \omega = \omega$ desda $(dL_g)_h^* (\omega_{gh}) = \omega_h$

Substitueer nu $h' = g h$. Dan is $L_g^* \omega = \omega$

desda $(dL_g)_{g^{-1}h'}^* (\omega_{h'}) = \omega_{g^{-1}h'}$

(b) Voor elke $\omega \in \mathcal{L}^k(G)^{\text{inv}}$ geldt met (a) dat

$$\omega_h = (dL_{h^{-1}})_h^* (\omega_e). \text{ De differentiaalvorm}$$

ω is dus uniek bepaald door $\omega_e \in \mathcal{L}^k(T_e G)$

Herinner je de identificatie van $T_e G \cong \text{Lie}(G)$ uit herhollage Wh. 8 en 10, gegeven door

$$\psi: T_e G \rightarrow \text{Lie}(G)$$

$$v \mapsto (h \mapsto (dL_h)_e v)$$

met inverse $X \in \text{Lie}(G) \mapsto (dL_{h^{-1}})_h (X_h)$

(evt. Thm. 8.37 in Lee)

$$\begin{aligned}
\text{Dan is } \omega(X_1, \dots, X_h)_h &= \omega_h((dL_h)_e v_1, \dots, (dL_h)_h v_h) \\
&= ((dL_h)_e^* \omega_h)(v_1, \dots, v_h) \\
&= \omega_e(v_1, \dots, v_h) \quad (v_1, \dots, v_h \in T_e G)
\end{aligned}$$

vanwege links-invariantie van ω .

Dit laat zien dat ϕ ingebed is, want ω is uniek bepaald door ω_e .

Merk ook op dat $\omega(X_1, \dots, X_h)$ constant is.

Voor surjectiviteit van ϕ , stel $T \in \Lambda^h(\text{Lie}(G))^*$

Definieer dan

$$\tilde{\omega}_e(v_1, \dots, v_h) := T(\psi(v_1), \dots, \psi(v_h))$$

met ψ het isomorfisme $T_e G \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(G)$ zoals hierboven gedefinieerd

Nu als eerder legt deze $\tilde{\omega}_e$ een inv. diff. vorm $\tilde{\omega} \in \Omega^h(G)^{\text{inv}}$ vast, door

$$\tilde{\omega}_h = (dL_{h^{-1}})_h^* (\tilde{\omega}_e)$$

Maar voor deze $\tilde{\omega}$ geldt:

$$\phi(\tilde{\omega})(X_1, \dots, X_h) = \tilde{\omega}(X_1, \dots, X_h)$$

$$\begin{aligned}
&= (dL_{h^{-1}})_h^*(\tilde{\omega}_e)(X_1|_h, \dots, X_h|_h) \\
&\stackrel{\text{gebruik dat } \tilde{\omega}(X_1, \dots, X_h) \text{ constant is.}}{=} \tilde{\omega}_e(dL_{h^{-1}}(X_1)|_h, \dots, dL_{h^{-1}}(X_h)|_h) \\
&= \tilde{\omega}_e(\psi^{-1}(X_1), \dots, \psi^{-1}(X_h)) \\
&= T(X_1, \dots, X_h)
\end{aligned}$$

c) Er geldt met Prop. 14.23 in lee dat

$$L_g^*(d\omega) = d(L_g^*\omega)$$

$$\text{Dus, als } L_g^*\omega = \omega \Rightarrow L_g^*(d\omega) = d\omega.$$

d) We gebruiken Prop. 14.32 uit lee, met $X_1, \dots, X_{h+1} \in \text{Lie}(G)$, en $\omega \in \Omega^h(G)^{\text{inv}}$

Allerwel is $\omega(X_1, \dots, X_h)$ zoals hierboven aangegeven constant op G , en valt de eerste term in (14.29) weg $\leadsto$

$$d\omega(X_1, \dots, X_{h+1})$$

$$= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{h+1})$$

Als we nu $T = \phi(u)$ schrijven, en
 $d' = \phi \cdot d \cdot T^{-1}$ volgt $d'(T) = \phi(dw)$
 en daeruit direct de formule (1).

$$c) (d')^2 \overset{(k=1)}{T}(x_1, \dots, x_3)$$

$$= d'T([x_1, x_2], x_3) - d'([x_1, x_3], x_2) + d'T$$

$$= T([([x_1, x_2], x_3]) - T([x_1, x_3], x_2]$$

$$(d')^2 T(x_1, x_2) =$$