Tentamen Lineaire Algebra B

25 juni 2021, 8:30–11:30

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, maar je antwoorden moeten exact zijn.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 55 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/55+1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Dit tentamen heeft 6 bladzijden.
- Veel succes!

Opgave 1 (5 punten)**.** Zij $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ een reële 3×3 matrix met eigenwaarde -1 met multipliciteit 2, en eigenwaarde 1 met multipliciteit 1. (En geen andere eigenwaarden.)

(a) [2 punten] Geef het karakteristieke polynoom van A.

(b) [3 punten] Bewijs dat A inverteerbaar is, en dat

$$A^{-1} = A^2 + A - I.$$

Oplossing. (a) Het karakteristieke polynoom van A is

$$(-1-t)(-1-t)(1-t) = 1 + t - t^2 - t^3.$$

(b) Vanwege de stelling van Cayley–Hamilton is dus

$$A(A^2 + A - I) = I.$$

□

Opgave 2 (15 punten)**.** In deze opgave beschouwen we het inprodukt op $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \tag{1}$$

voor $x = (x_1, x_2, x_3)$ en $y = (y_1, y_2, y_3)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) [6 punten] Bewijs dat dit inderdaad een inprodukt definieert.

Beschouw de volgende vectoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 2, 3) \\ w_2 &= (3, 2, 1). \end{aligned}$$

(b) [3 punten] Bewijs dat deze twee vectoren lineair onafhankelijk zijn.

(c) [6 punten] Bepaal een orthonormale basis (t.a.v. het inprodukt (1)) voor het opspansel van w_1 en w_2.

Oplossing. (a) Stel dat $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 + 3(x_3 + y_3)z_3 \\ &= (x_1z_1 + 2x_2z_2 + 3x_3z_3) + (y_1z_1 + 2y_2z_2 + 3y_3z_3) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \end{aligned}$$

en

$$\langle cx, y\rangle = cx_1y_1 + 2cx_2y_2 + 3cx_3y_3 = c(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3) = c\langle x, y\rangle,$$

en

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 = y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 = \langle y, x\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},$$

omdat $\langle y, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Stel nu dat $x \neq 0$. Dan

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

Alle termen zijn groter dan of gelijk aan nul. Dus als een ervan ongelijk aan nul, dus positief is, dan is de som positief.

(b) Deze vectoren liggen niet in elkaars verlengde, en zijn dus lineair onafhankelijk.

Het kan ook langer. Als $a_1w_1 + a_2w_2 = 0$ voor $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, dan

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 3a_1 + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

De eerste vergelijking 3 keer van de derde aftrekken geeft $a_2 = 0$. Elke andere vergelijking geeft dan $a_1 = 0$.

(c) We passen eerst het Gram–Schmidt proces toe om een orthogonale basis $\{v_1, v_2\}$ van W te vinden. We berekenen

$$\begin{aligned}
v_1 &= w_1 = (1,2,3) \\
\|v_1\|^2 &= 1 + 8 + 27 = 36 \\
\langle w_2, v_1 \rangle &= 3 + 8 + 9 = 20 \\
v_2 &= w_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (3,2,1) - \frac{5}{9}(1,2,3) = \frac{1}{9}(22, 8, -6) \\
\|v_2\|^2 &= 80/9.
\end{aligned}$$

(We kunnen direct controleren dat deze twee vectoren inderdaad orthogonaal zijn.)

Door te normaliseren vinden we de orthonormale basis bestaande uit de vectoren

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{6}(1,2,3) \\
u_2 &= \frac{1}{6\sqrt{5}}(11, 4, -3).
\end{aligned}$$

$\square$

Opgave 3 (16 punten)**.** Zij V een eindig-dimensionale inproduktruimte over $F = \mathbb{R}$ of $F = \mathbb{C}$.

(a) [3 punten] Stel dat we twee lineaire afbeeldingen $T_1, T_2 \colon V \to V$ hebben, zo dat $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $T_1^n T_2 = T_2 T_1^n$.

Zij vanaf nu $T \colon V \to V$ een normale lineaire afbeelding.

(b) [5 punten] Bewijs dat voor alle $\lambda \in F$ en $n \in \mathbb{N}$, de operator $(T - \lambda I)^n$ normaal is.

(c) [5 punten] Bewijs dat voor alle $\lambda \in F$, $n \in \mathbb{N}$ en $v \in V$,

$$\|(T - \lambda I)^n v\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)^n v\|.$$

(d) [3 punten] Bewijs dat elke gegeneraliseerde eigenvector van T ook een gegeneraliseerde eigenvector van T^* is.

Oplossing. (a)We gebruiken inductie over n. Voor $n = 1$ is de uitspraak waar per aanname. En als $T_1^n T_2 = T_2 T_1^n$, dan is

$$T_1^{n+1} T_2 = T_1 T_1^n T_2 = T_1 T_2 T_1^n = T_2 T_1^{n+1}.$$

(b) Omdat T normaal is, is ook $T - \lambda I$ normaal:

$$(T - \lambda I)^*(T - \lambda I) = T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + |\lambda|^2 = (T - \lambda I)(T - \lambda I)^*.$$

Dus vanwege onderdeel (a) commuteert $(T - \lambda I)^n$ met $(T - \lambda I)^*$. Door (a) nog eens toe te passen vinden we dat $(T-\lambda I)^n$ commuteert met $((T-\lambda)^*)^n = ((T - \lambda I)^n)^*$.

(c) Stel dat $\lambda \in F$, $v \in V$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\|(T - \lambda I)^n v\|^2 = \langle (T - \lambda I)^n v, (T - \lambda I)^n v\rangle = \langle ((T - \lambda I)^n)^*(T - \lambda I)^n v, v\rangle.$$

Vanwege (b) is $(T - \lambda)^n$ normaal. Dus de uitdrukking aan de rechterkant is gelijk aan

$$\begin{aligned}\langle (T - \lambda I)^n((T - \lambda I)^n)^* v, v\rangle &= \langle ((T - \lambda I)^n)^* v, ((T - \lambda I)^n)^* v\rangle \\ &= \langle (T^* - \bar{\lambda} I)^n v, (T^* - \bar{\lambda} I)^n v\rangle = \|(T^* - \bar{\lambda} I)^n v\|^2.\end{aligned}$$

(d) Als $v \in V$ een gegeneraliseerde eigenvector is van T, dan zijn er $\lambda \in F$ en $n \in \mathbb{N}$ zo dat $(T - \lambda I)^n v = 0$. Vanwege onderdeel (c) is dan $\|(T^* - \bar{\lambda} I)^n v\| = 0$, dus $(T^* - \bar{\lambda} I)^n v = 0$.

Alternatieve oplossing. Zij v een gegeneraliseerde eigenvector van T, bij eigenwaarde λ. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $(T - \lambda I)^n v = 0$. En $(T - \lambda I)^n$ is normaal vanwege onderdeel (b). Omdat v een eigenvector is van $(T - \lambda I)^n$ bij eigenwaarde nul, is v vanwege Stelling 6.15c ook een eigenvector van $((T-\lambda I)^n)^* = (T^*-\bar{\lambda} I)^n$ bij eigenwaarde $\bar{0} = 0$. En dus een gegeneraliseerde eigenvector van T^*. □

Opgave 4 (6 punten)**.** We beschouwen de 1-dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}$ met het standaard inprodukt:

$$\langle x, y\rangle = xy,$$

voor $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) [3 punten] Beschrijf de verzameling van alle orthogonale lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zo expliciet mogelijk.

(b) [3 punten] Beschrijf de verzameling van alle isometrieën ("rigid motions" in het boek) van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zo expliciet mogelijk.

Oplossing. (a) Een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven door een 1×1 matrix, dus door vermenigvuldiging met een reëel getal a. Zo'n afbeelding behoudt de norm dan en slechts dan als $|a| = 1$. Dus $a = 1$ of

$a = -1$. Er zijn dus twee orthogonale lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: de identiteit en min de identiteit.

(b) Als $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een isometrie is, dan zijn er een orthogonale afbeelding $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een $v_0 \in \mathbb{R}$ zo dat voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = Tx + v_0.$$

Vanwege onderdeel (a) is T plus of min de identiteit. Dus de isometrieën van $\mathbb{R}$ zijn de afbeeldingen van de vorm

$$f(x) = x + v_0$$

en

$$f(x) = -x + v_0$$

voor $v_0 \in \mathbb{R}$. □

Opgave 5 (13 punten)**.** Beschouw de lineaire afbeelding $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door de matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Je mag gebruiken dat het karakteristieke polynoom van T gelijk is aan $(3-t)^3$ zonder dat te bewijzen.

(a) [6 punten] Bewijs dat T een Jordan-normaalvorm heeft, en dat die gelijk is aan

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) [7 punten] Vind een inverteerbare matrix Q zo dat $A = QJQ^{-1}$.

Oplossing. (a) Omdat het karakteristieke polynoom van T gelijk is aan $(3-t)^3$, is de enige eigenwaarde 3. We zien ook dat dit karakteristiek polynoom splijt, en daarom heeft T een Jordan normaalvorm.

Het puntendiagram bij de eigenwaarde 3 bestaat uit 3 punten, de multipliciteit van de eigenwaarde. En

$$A - 3I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wat rang 1 heeft. Het aantal punten op de eerste rij in het puntendiagram is dus

$$\dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rang}(A - 3I) = 3 - 1 = 2.$$

Daarom bestaat de tweede rij uit 1 punt. Uit het puntendiagram zien we dat A de Jordan normaalvorm J heeft.

(b) Uit het puntendiagram weten we dat er een Jordanbasis van de vorm $\{(A - 3I)v_1, v_1, v_2\}$ is, met v_2 een eigenvector van A bij eigenwaarde 3, en $v_1 \in N((A-3I)^2)$ maar niet in $N(A-3I)$. We bepalen eerst de eigenvectoren bij eigenwaarde 3. Vanwege (2) is v een eigenvector bij eigenwaarde 3 dan en slechts dan als $-v_1 + v_2 - v_3 = 0$. De eigenruimte wordt dus opgespannen door de vectoren $(1, 0, -1)$ en $(1, 1, 0)$. We kiezen $v_2 = (1, 0, -1)$.

Nu bepalen we de kern van $(A - 3I)^2$. Door een berekening vinden we $(A - 3I)^2 = 0$, dus deze kern is heel $\mathbb{R}^3$. We kiezen $v_1 = (1, 0, 0)$, dat is geen eigenvector. Dan is

$$(A - 3I)v_1 = \frac{-1}{2}(1, 1, 0).$$

We hebben onze vectoren goed gekozen: de verzameling $\{(A - 3I)v_1, v_1, v_2\}$ is lineair onafhankelijk. En dus een Jordanbasis.

Voor Q kunnen we de matrix nemen waarvan de kolommen een Jordanbasis zijn, op de goede volgorde. We vinden zo

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Verschillende keuzes leiden tot verschillende matrices Q.) $\square$