

Uitwerking Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen + Numerieke Methoden (1 april 2020)

- Voor dit tentamen zijn maximaal **90 punten** te behalen. Het aantal punten per onderdeel staat vermeld op het tentamen zelf.
- Omdat veel studenten te weinig tijd hadden om alle vragen te maken, is de berekening van het tentamencijfer (T) anders geworden dan wat op het tentamen vermeld staat. De oorspronkelijke formule $T = 1 + p/10$, waarbij $p =$ aantal punten, is vervangen door de nieuwe (gunstigere) formule $T = \min\{10, 1 + 54p(p + 400)^{-1}\}$.
- Zoals ook op het tentamen vermeld staat, wordt de cursus met succes afgesloten als $(T \geq 5) \wedge (H \geq 5) \wedge (0.8T + 0.2H \geq 5.5)$, waarbij $T =$ tentamencijfer en $H =$ gemiddeld huiswerkcijfer.
- Als de cursus met succes afgesloten wordt, zal het eindresultaat gelijk zijn aan de op een halve punt afgeronde waarde van $0.8T + 0.2H$, waarbij 5.5 niet meedoet. Dit is echter in tegenspraak met eerdere mededelingen dat het eindresultaat in dat geval gelijk zal zijn aan ‘Voldaan’. Om de gedane belofte gestand te doen, zal de student in dat geval de mogelijkheid hebben om het numerieke eindresultaat te laten vervangen door ‘Voldaan’.
- Elk tentamen was in essentie hetzelfde, maar had kleine parametrische variaties in vragen 1, 2, 4, 5, 6 en 9, zodat iedere student een uniek tentamen had. Deze uitwerking is gemaakt voor één keuze van de parameters. De uitwerking voor andere parameterkeuzes kan hieruit gemakkelijk afgeleid worden.

1. Beschouw bij gegeven $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$ het beginwaardeprobleem

$$u' = \frac{\sin t}{2u^3}, \quad u(t_0) = u_0.$$

(a) Voor welke paren $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ bestaat er een $\delta > 0$ zodat bovenstaand beginwaardeprobleem een unieke oplossing heeft op het interval $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$? Waarom?

Volgens Corollary 2.6 (deel I) bestaat er een unieke oplossing op het interval $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ voor zekere $\delta > 0$ als de functie f gedefinieerd door $f(t, v) = \sin t / (2v^3)$ continu differentiëerbaar is in een open omgeving \mathcal{E}_0 van het punt (t_0, u_0) . Deze functie is continu differentiëerbaar op zijn hele domein $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ want zijn twee partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial t}(t, v) = \cos t / (2v^3)$ en $\frac{\partial f}{\partial v}(t, v) = -3 \sin t / (2v^4)$ bestaan en zijn continu op \mathcal{D} . Omdat het domein \mathcal{D} open is, is Corollary 2.6 toepasbaar voor ieder punt $(t_0, u_0) \in \mathcal{D}$. Dat zijn dus alle punten (t_0, u_0) in het (t, v) -vlak behalve de v -as.

(b) Bepaal een expliciete uitdrukking voor de oplossing indien $t_0 = \pi/2$ en $u_0 = -1$.

We herschrijven deze scheidbare differentiaalvergelijking als $4u^3u' = 2 \sin t$. Integratie van t_0 tot t levert $u(t)^4 - u_0^4 = -2(\cos t - \cos t_0)$. Met $t_0 = \pi/2$ en $u_0 = -1$ volgt hieruit dat $u(t)^4 = 1 - 2 \cos t$ oftewel $u(t) = \pm \sqrt[4]{1 - 2 \cos t}$. Door nogmaals de beginconditie $u(\pi/2) = -1$ op te leggen, zien we dat de (unieke) oplossing verkregen wordt door hier het min-teken te kiezen, dus $u(t) = -\sqrt[4]{1 - 2 \cos t}$.

(c) Wat is het maximale existentie-interval van de in (b) gevonden oplossing?

Het grootste interval waarop deze oplossing gedefiniëerd kan worden is $(\pi/3, 5\pi/3)$. De grenzen van dit interval doen niet mee omdat daar de oplossing nul dreigt te worden, en de afgeleide onbegrensd.

2. Bekijk het beginwaardeprobleem

$$(*) \quad \begin{cases} u_1'(t) = u_1(t)u_2(t) - 1/25, & u_1(0) = 0, \\ u_2'(t) = u_1(t)^2 + u_2(t)^2, & u_2(0) = 0. \end{cases}$$

Vind een $T > 2$ zodat (*) een unieke oplossing heeft op $[0, T]$.

Stelling 2.5 uit deel I kan toegepast worden met $t_0 = 0$ en

$$u_0 = v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_1, v_2) \equiv \begin{pmatrix} v_1 v_2 - 1/25 \\ v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat voor het autonome probleem in deze opgave de functie f geen argument t heeft, hetgeen de toepassing van de stelling vergemakkelijkt. De waarde van T die in deze stelling voorkomt kan daardoor willekeurig groot gekozen worden. De waarde van $R_0 > 0$ laten we nog even vrij, want deze bepaalt de waarde van de bovengrens γ van $\|f(v)\|$ op de verzameling $\mathcal{D}_0 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq R_0\}$. De constante γ moet dus zo gekozen worden dat (zie (2.9))

$$\|f(v)\| \leq \gamma \quad (\text{voor alle } v \in \mathcal{D}_0).$$

De keuze van de norm is vrij, maar het makkelijkst rekt met de maximumnorm. Om de stelling te kunnen toepassen moeten we verifiëren dat f aan een Lipschitz voorwaarde voldoet op \mathcal{D}_0 . Omdat f continu differentiëerbaar is op \mathbb{R}^2 , voldoet f aan een Lipschitz voorwaarde op elke begrensde verzameling, dus ook op \mathcal{D}_0 . De exacte waarde van de Lipschitz constante is niet relevant in de stelling. Met de maximumnorm leidt men eenvoudig af dat voor alle $v \in \mathcal{D}_0$ geldt dat

$$\begin{aligned} \|f(v)\| &= \left\| \begin{pmatrix} v_1 v_2 - 1/25 \\ v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix} \right\| = \max\{|v_1 v_2 - 1/25|, |v_1^2 + v_2^2|\} \leq \\ &\leq \max\{|v_1||v_2| + 1/25, v_1^2 + v_2^2\} \leq \max\{R_0^2 + 1/25, 2R_0^2\}. \end{aligned}$$

We kunnen dus $\gamma = \max\{R_0^2 + 1/25, 2R_0^2\}$ kiezen, en de stelling zegt dan dat er een unieke oplossing bestaat op een interval $[0, \bar{T}]$ met (zie (2.13))

$$\bar{T} \geq \frac{R_0}{\gamma} = \frac{R_0}{\max\{R_0^2 + 1/25, 2R_0^2\}} = \min \left\{ \frac{R_0}{R_0^2 + 1/25}, \frac{1}{2R_0} \right\}.$$

De keuze $R_0 = 1/5$ is optimaal en leidt tot $\bar{T} \geq 5/2$.

3. Gegeven zijn twee vierkante matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ met $AB \neq BA$. Toon aan dat voor voldoende kleine $t > 0$ geldt dat

$$e^{t(A+B)} \neq e^{tA}e^{tB}.$$

Er geldt

$$e^{t(A+B)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A+B)^k = I + t(A+B) + \frac{t^2}{2} (A+B)^2 + \mathcal{O}(t^3) \quad (t \rightarrow 0).$$

Evenzo geldt

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{tB} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right) = \left(I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 \right) \left(I + tB + \frac{t^2}{2} B^2 \right) + \mathcal{O}(t^3) \\ &= I + t(A+B) + \frac{t^2}{2} (A^2 + 2AB + B^2) + \mathcal{O}(t^3) \quad (t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Na aftrekking volgt

$$\begin{aligned} e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB} &= \frac{t^2}{2} ((A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)) + \mathcal{O}(t^3) \\ &= \frac{t^2}{2} (BA - AB) + \mathcal{O}(t^3) \quad (t \rightarrow 0), \end{aligned}$$

zodat

$$\frac{2}{t^2} \left(e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB} \right) = BA - AB + \mathcal{O}(t) \quad (t \rightarrow 0).$$

Omdat $BA - AB \neq O$ is het rechterlid ongelijk aan de nulmatrix O voor alle voldoende kleine $t > 0$. Het gevraagde volgt hier direct uit.

4. Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$(**) \quad \begin{cases} x' = y(1-y), \\ y' = x(1-x). \end{cases}$$

(a) Bepaal de stationaire punten van (**) en, indien mogelijk, door middel van linearisatie, de stabiliteit van deze stationaire punten.

We noteren $u = (x, y)^T$ en schrijven het systeem als $u' = f(u)$ waarbij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefiniëerd is als

$$f(x, y) \equiv \begin{pmatrix} y(1-y) \\ x(1-x) \end{pmatrix}.$$

De stationaire punten zijn de nulpunten van f , dus dat zijn er vier:

$$(0, 0)^T, (1, 1)^T, (0, 1)^T, (1, 0)^T.$$

Met behulp van Corollary 4.5 proberen we de stabiliteit van deze punten te achterhalen. Merk op dat dit geoorloofd is omdat f continu differentieerbaar is (op \mathbb{R}^2). We dienen de functionaalmatrix $A = f'(u_*)$ te bepalen in ieder van de stationaire punten u_* . De functionaalmatrix in een willekeurig punt $(x, y)^T$ wordt gegeven door

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1-2y \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Voor de vier bovengenoemde stationaire punten is de functionaalmatrix respectievelijk

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van de eerste twee matrices zijn $\lambda = \pm 1$ en van de laatste twee $\lambda = \pm i$. Voor de eerste twee stationaire punten geldt dus dat $\max \operatorname{Re} \lambda = 1$ en voor de laatste twee dat $\max \operatorname{Re} \lambda = 0$. Corollary 4.5 zegt dat de eerste twee stationaire punten instabiel zijn, maar doet geen uitspraak over de stabiliteit van de laatste twee.

(b) Geef een expliciete vergelijking $E(x, y) = c$ voor de banen van oplossingen van (**).

Als we y als functie van x opvatten, dan volgt

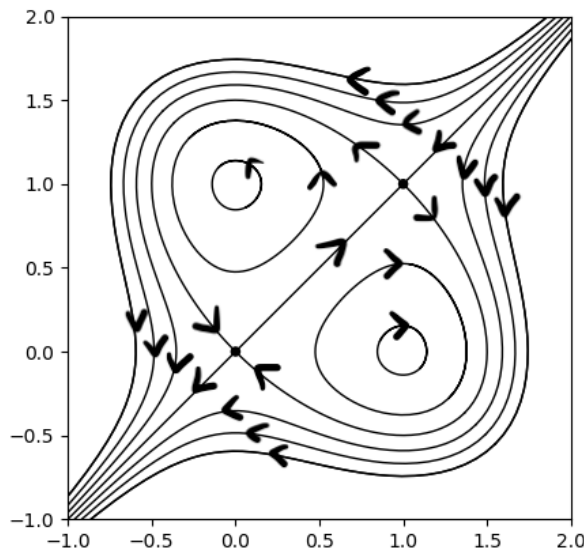
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{x(1-x)}{y(1-y)}.$$

We herschrijven deze separabele differentiaalvergelijking als $y(1-y)dy = x(1-x)dx$. Integreren levert $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$, zodat we $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ kunnen nemen. Inderdaad geldt dan dat

$$\frac{d}{dt}E(x, y) = \frac{\partial E}{\partial x}x' + \frac{\partial E}{\partial y}y' = -x(1-x)x' + y(1-y)y' = -y'x' + x'y' = 0.$$

(c) In onderstaande figuur is een aantal niveauverzamelingen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, y) = c\}$ getekend. Hoeveel banen zijn er in deze figuur zichtbaar? Neem de figuur over, en geef met behulp van pijlen aan in welke richting de banen doorlopen worden.

Op de lijn met vergelijking $y = x$ zijn de twee stationaire punten $(0, 0)^T$ en $(1, 1)^T$ getekend, die allebei een baan vormen. Deze punten splitsen de lijn in 3 lijnstukken, die alledrie een baan vormen. De twee halve ellipsen die vertrekken uit stationair punt $(1, 1)^T$ en aankomen in stationair punt $(0, 0)^T$ zijn ook allebei banen. Binnen de ellips zien we 4 gesloten banen. Aan beide kanten van de lijn $y = x$ zien we tenslotte 3 banen. In totaal zijn er dus $2 + 3 + 2 + 4 + 2 \times 3 = 17$ banen.



De richting waarin de oplossingen de banen doorlopen is eenvoudig af te leiden uit de differentiaalvergelijking. Uit $x' = y(1 - y)$ zien we dat $x' > 0 \Leftrightarrow y \in (0, 1)$ en uit $y' = x(1 - x)$ dat $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$. Als we de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ en $y = 1$ tekenen, wordt het vlak opgedeeld in 9 delen (zoals bij 'boter, kaas en eieren'). In ieder van de 9 delen is zowel het teken van x' als dat van y' constant.

(d) Welke stationaire punten zijn stabiel?

In onderdeel (a) hadden we al gezien dat $(0, 0)^T$ en $(1, 1)^T$ instabiel zijn. In de figuur is te zien dat het zadelpunten zijn. Dit was ook uit Remark 4.7 al te concluderen. De stabiliteit van de stationaire punten $(0, 1)^T$ en $(1, 0)^T$ bleef onbekend in onderdeel (a), maar in de figuur zien we dat deze twee punten stabiel moeten zijn omdat ze omgeven worden door gesloten banen corresponderend met periodieke oplossingen. Een formeel bewijs hiervan (refererend aan de ε, δ -definitie in Definition 4.1 in deel I) heeft enige voeten in de aarde, maar dat hoefde niet gegeven te worden. In dat formele bewijs kan bij gegeven $\varepsilon > 0$ een gesloten baan \mathcal{U} om het stationaire punt u_* gekozen worden zodat de hele baan bevat is in een bolletje met straal ε om u_* . Als we $\delta > 0$ definiëren als $\text{dist}(u_* : \mathcal{U})$, de afstand van u_* tot \mathcal{U} , dan ziet men eenvoudig in dat u_* stabiel is in de zin van 'Definition 4.1'.

5. De derdegraadsvergelijking $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$ heeft drie reële wortels $a < b < c$.

(a) Toon aan dat de methode van Newton voor elke startwaarde $x_0 \in (c, \infty)$ monotoon convergeert naar c . (Merk op: het is hierbij nuttig om de grafiek van de derdegraads te schetsen, maar het bewijs mag niet louter grafisch zijn.)

Men gaat eenvoudig na dat $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ en $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$, zodat $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x > 3$. Merk ook op dat $c > 3$ omdat $f(3) = -1 < 0$.

Zij $x_0 > c$ gegeven. Dan is $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ goed gedefinieerd omdat $f'(x_0) > 0$. Vanwege de positiviteit van $f(x_0)$ en $f'(x_0)$ geldt dat $x_1 < x_0$.

Schrijf nu $x_1 = g(x_0)$ met $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Merk op dat $g(c) = 0$ en dat voor alle $x > c$ geldt dat $g'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2 > 0$. Met behulp van de middelwaardestelling volgt nu dat er een $\xi \in (c, x_0)$ bestaat met

$$x_1 - c = g(x_0) - g(c) = g'(\xi)(x_0 - c) > 0.$$

We hebben nu bewezen dat $c < x_1 < x_0$. Met volledige inductie volgt dat de rij $\{x_k\}$ strikt monotoon dalend is en van onderen begrensd door c . De rij moet dus een limiet x_* hebben met $x_* \geq c$. Omdat $x_{k+1} = g(x_k)$ en g continu is op het interval $[c, \infty)$, moet de limiet x_* wel een dekpunt zijn van g , en dus een nulpunt van f . Het enige nulpunt van f op $[c, \infty)$ is c zelf, dus $x_* = c$.

(b) Men kan bewijzen (maar dat hoeft hier niet) dat de drie wortels a, b, c voldoen aan

$$\begin{cases} a + b + c - 6 & = 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 - 18 & = 0, \\ a^3 + b^3 + c^3 - 57 & = 0. \end{cases}$$

We willen de methode van Newton op dit stelsel vergelijkingen toepassen. Voor welke startwaarden $u_0 = (a_0, b_0, c_0)^T \in \mathbb{R}^3$ is de eerste Newton-stap $u_0 \rightarrow u_1$ goed gedefinieerd?

We schrijven het stelsel vergelijkingen als $F(u) = 0$, waarbij $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. De bepaling van u_1 in de eerste Newton-stap komt neer op het oplossen van het lineaire stelsel $F'(u_0)(u_1 - u_0) = -F(u_0)$. Dit is uniek oplosbaar d.e.s.d.a. de functionaalmatrix $F'(u_0)$ inverteerbaar is. Deze matrix is gelijk aan

$$F'(u_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a_0 & 2b_0 & 2c_0 \\ 3a_0^2 & 3b_0^2 & 3c_0^2 \end{pmatrix}.$$

Na schaling van de onderste twee rijen (delen door 2 respectievelijk 3) herkennen we hierin een Vandermonde matrix (zie (4.11) in deel II), en daarvan weten we dat die inverteerbaar is d.e.s.d.a. a_0, b_0 en c_0 verschillend zijn.

(c) Bepaal $u_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$ voor de startwaarde $u_0 = (a_0, b_0, c_0)^T = (1, 2, 3)^T$.

Met de notatie uit onderdeel (b) geldt dat $u_1 = u_0 + v$ waarbij $v \in \mathbb{R}^3$ de oplossing is van het stelsel $F'(u_0)v = -F(u_0)$. Dit stelsel wordt gegeven door

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 12 & 27 & 21 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

en we vinden $v = (-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})^T$ gevolgd door

$$u_1 = u_0 + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6. We beschouwen polynomen P van de vorm

$$P(x) = x^{25} + c_{24}x^{24} + c_{23}x^{23} + \dots + c_1x + c_0,$$

waarbij de coëfficiënten c_i reëel zijn.

(a) Voor welk polynoom P van bovenstaande vorm is de waarde

$$C = \max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

minimaal?

Volgens Lemma 3.4 (deel II) kunnen we $P(x) = 2^{-24}T_{25}(x)$ nemen, waarbij T_{25} het Chebyshev polynoom is van graad 25. De schalingsfactor 2^{-24} zorgt ervoor dat P monisch is.

(b) Hoe groot is deze minimale waarde van C ?

Uit $\max_{x \in [-1, 1]} |T_{25}(x)| = 1$ volgt dat $C = 2^{-24}$.

(c) Bepaal $P(\frac{1}{2}\sqrt{3})$ voor het in onderdeel (a) gevonden polynoom P .

Uit $T_{25}(\cos \theta) = \cos(25\theta)$ volgt dat

$$P(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = P(\cos \frac{\pi}{6}) = 2^{-24}T_{25}(\cos \frac{\pi}{6}) = 2^{-24} \cos(25 \cdot \frac{\pi}{6}) = 2^{-24} \cos(\frac{\pi}{6}) = 2^{-25}\sqrt{3}.$$

7. In deze opgave bekijken we voor variabele $h > 0$ diverse benaderingen van de integraal $J = \int_0^h \varphi(x) dx$, waarbij φ een oneindig vaak differentieerbare functie is op \mathbb{R} .

(a) Als eerste benadering van J bekijken we de (enkelvoudige) trapeziumregel \tilde{J}_1 . Geef een expliciete formule voor \tilde{J}_1 en toon met behulp van Taylorontwikkeling aan dat

$$(1) \quad J - \tilde{J}_1 = -\frac{h^3}{12}\varphi''(0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (h \rightarrow 0).$$

De (enkelvoudige) trapeziumregel is gedefiniëerd als $\tilde{J}_1 = h \left(\frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi(h) \right)$.
Om (1) aan te tonen gebruiken we Taylorontwikkeling van φ rond $x = 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{1}{2}x^2\varphi''(0) + \mathcal{O}(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

Door hierin $x = h$ te nemen, vinden we voor \tilde{J}_1 de ontwikkeling

$$\tilde{J}_1 = h \left(\frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi(h) \right) = h\varphi(0) + \frac{1}{2}h^2\varphi'(0) + \frac{1}{4}h^3\varphi''(0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (h \rightarrow 0).$$

Door bovenstaande Taylorontwikkeling voor φ te integreren van $x = 0$ tot $x = h$ vinden we ook een ontwikkeling voor J ,

$$J = \int_0^h \varphi(x) dx = h\varphi(0) + \frac{1}{2}h^2\varphi'(0) + \frac{1}{6}h^3\varphi''(0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (h \rightarrow 0).$$

Aftrekking van de ontwikkeling voor \tilde{J}_1 van die voor J leidt direct tot (1).

Opmerking: In de oorspronkelijke opgave stond in formules (1), (2) en (3) abusievelijk $\mathcal{O}(h^5)$ in plaats van $\mathcal{O}(h^4)$.

(b) Als tweede benadering van J bekijken we de samengestelde (2-voudige) trapeziumregel \tilde{J}_2 gebaseerd op de knooppunten $0, h/2$ en h . Geef een expliciete formule voor \tilde{J}_2 .

De 2-voudige trapeziumregel \tilde{J}_2 is de benadering die verkregen wordt door op ieder van de twee subintervallen $[0, h/2]$ en $[h/2, h]$ de enkelvoudige trapeziumregel toe te passen,

$$\tilde{J}_2 = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h}{2}\right) \right) + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi(h) \right) = h \left(\frac{1}{4}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4}\varphi(h) \right).$$

(c) Gegeven is (hoeft niet bewezen te worden) dat

$$(2) \quad J - \tilde{J}_2 = -\frac{h^3}{48}\varphi''(0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (h \rightarrow 0).$$

Als derde benadering van J definiëren we $\tilde{J}_3 = \alpha\tilde{J}_1 + (1 - \alpha)\tilde{J}_2$ voor zekere $\alpha \in \mathbb{R}$. Bepaal, door gebruik te maken van (1) en (2), de waarde van α waarvoor geldt dat

$$(3) \quad J - \tilde{J}_3 = \mathcal{O}(h^4) \quad (h \rightarrow 0).$$

Er geldt

$$J - \tilde{J}_3 = \alpha (J - \tilde{J}_1) + (1 - \alpha) (J - \tilde{J}_2) = -\frac{h^3}{48} \varphi''(0) (4\alpha + (1 - \alpha)) + \mathcal{O}(h^4) \quad (h \rightarrow 0).$$

We zien dat (3) geldt dan en slechts dan als $4\alpha + (1 - \alpha) = 0$, dus als $\alpha = -1/3$.

(d) Welke bekende methode herken je in \tilde{J}_3 als α zo gekozen is dat (3) geldt?

Met $\alpha = -1/3$ geldt

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3 &= \frac{-1}{3} \tilde{J}_1 + \frac{4}{3} \tilde{J}_2 = \frac{-1}{3} h \left(\frac{1}{2} \varphi(0) + \frac{1}{2} \varphi(h) \right) + \frac{4}{3} h \left(\frac{1}{4} \varphi(0) + \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4} \varphi(h) \right) \\ &= h \left(\frac{1}{6} \varphi(0) + \frac{2}{3} \varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6} \varphi(h) \right). \end{aligned}$$

Dit is de regel van Simpson.

8. Bij gegeven $u_0 \in \mathbb{R}^m$ en $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ bekijken we het beginwaardeprobleem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

We nemen aan dat f continu is en voldoet aan de globale Lipschitz voorwaarde

$$\|f(t, v) - f(t, \tilde{v})\| \leq L \|v - \tilde{v}\| \quad (\text{voor alle } t \in \mathbb{R} \text{ en } v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^m),$$

waarbij $\|\cdot\|$ een norm is op \mathbb{R}^m en $L > 0$. We kiezen een stapgrootte $\tau > 0$ en bepalen met behulp van de trapeziumregel voor $n = 1, 2, \dots$ benaderingen u_n van de oplossing $u(t)$ in de punten $t = t_n = n\tau$,

$$(TR) \quad u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2} \tau f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{1}{2} \tau f(t_n, u_n).$$

(a) De benadering u_n is impliciet gedefiniëerd door (TR). Bij gegeven t_{n-1}, u_{n-1}, τ kan deze relatie geschreven worden als $u_n = G(u_n)$, waarbij $G(u_n)$ het rechterlid voorstelt van (TR). Toon aan dat G een uniek vast punt heeft in \mathbb{R}^m als $\tau L < 2$.

De afbeelding $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ is gedefiniëerd door

$$G(v) \equiv u_{n-1} + \frac{1}{2} \tau f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{1}{2} \tau f(t_n, v).$$

Voor elk tweetal vectoren $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^m$ geldt dat

$$\|G(v) - G(\tilde{v})\| = \left\| \frac{1}{2} \tau f(t_n, v) - \frac{1}{2} \tau f(t_n, \tilde{v}) \right\| \leq \frac{1}{2} \tau L \|v - \tilde{v}\|.$$

We zien dat G een contractie is op $\mathcal{D} = \mathbb{R}^m$ als $\tau L < 2$. In dat geval volgt uit Stelling 1.7 (deel II) dat G een uniek vast punt heeft in \mathbb{R}^m .

(b) In plaats van u_n exact te bepalen, doen we twee stapjes vaste-punt iteratie, startend met u_{n-1} , dat wil zeggen, we benaderen u_n door $G(G(u_{n-1}))$. Toon aan dat dit leidt tot de expliciete trapeziumregel.

Als we u_n benaderen door $G(G(u_{n-1}))$, dan geldt

$$u_n = G(u_n^*) \quad \text{met} \quad u_n^* = G(u_{n-1}).$$

Dit kunnen we herschrijven als

$$\begin{aligned} u_n^* &= u_{n-1} + \frac{1}{2}\tau f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{1}{2}\tau f(t_n, u_{n-1}), \\ u_n &= u_{n-1} + \frac{1}{2}\tau f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{1}{2}\tau f(t_n, u_n^*). \end{aligned}$$

Dit lijkt erg op de expliciete trapeziumregel, die ook van bovenstaande vorm is, maar met een iets andere definitie van de predictor u_n^* , namelijk

$$u_n^* = u_{n-1} + \tau f(t_{n-1}, u_{n-1}).$$

We zien dat beide methoden dezelfde benadering geven als $f(t_{n-1}, u_{n-1}) = f(t_n, u_{n-1})$. Dit is alleen het geval voor autonome problemen, maar niet in het algemeen.

9. Bekijk het beginwaardeprobleem

$$u'(t) = Au(t) + b(t), \quad u(0) = u_0,$$

waarbij $u_0 \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ en $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu. Pas één stap van de Runge-Kutta methode met nevenstaand tableau toe. Toon aan dat voor voldoende kleine stapgrootte $\tau > 0$ geldt dat u_n gegeven wordt door

$$\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$u_n = \left(I + \frac{2}{3}\tau A\right) \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} u_{n-1} + \tau \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} b\left(t_{n-1} + \frac{1}{3}\tau\right).$$

Om de notatie bondig te houden, schrijven we v voor $v_{n,1}$ en bekijken we alleen de eerste stap $u_0 \rightarrow u_1$ van de Runge-Kutta methode,

$$v = u_0 + \frac{1}{3}\tau f(\tau/3, v), \quad u_1 = u_0 + \tau f(\tau/3, v).$$

Met de afbeelding $f(t, x) \equiv Ax + b(t)$ kunnen deze relaties herschreven worden als

$$v = u_0 + \frac{1}{3}\tau Av + \frac{1}{3}\tau b(\tau/3), \quad u_1 = u_0 + \tau Av + \tau b(\tau/3).$$

Uit de eerste relatie kunnen we v oplossen (mits $\tau > 0$ voldoende klein is) als

$$v = \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} u_0 + \frac{1}{3}\tau \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} b(\tau/3).$$

Substitutie van deze expressie voor v in de tweede relatie levert de gevraagde expliciete uitdrukking voor u_1 . Hierbij moeten de volgende twee identiteiten gebruikt worden,

$$\begin{aligned} I + \tau A \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} &= \left(I + \frac{2}{3}\tau A\right) \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} \\ I + \frac{1}{3}\tau A \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1} &= \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)^{-1}. \end{aligned}$$