Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen + Numerieke Methoden (NWI-WB003F) — 29 maart 2019.

- Vermeld op elk blad uw naam.
  Vermeld op de eerste bladzijde ook uw studentnummer en studierichting.
- Er zijn maximaal 45 punten te behalen. Het tentamencijfer is 1+(aantal punten)/5.
- Antwoorden dienen altijd gemotiveerd te worden.
- Voor voldoende gladde reële functies φ mag u gebruik maken van de Taylor ontwikkeling

$$\varphi(x+h) = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(x)h^j + \frac{1}{(N+1)!}\varphi^{(N+1)}(\xi)h^{N+1} \qquad \text{(met } \xi \text{ tussen } x \text{ en } x+h\text{)}$$

---

1. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking van Bernoulli,

$$u' = \frac{u}{t} + \frac{t}{u}\,.$$

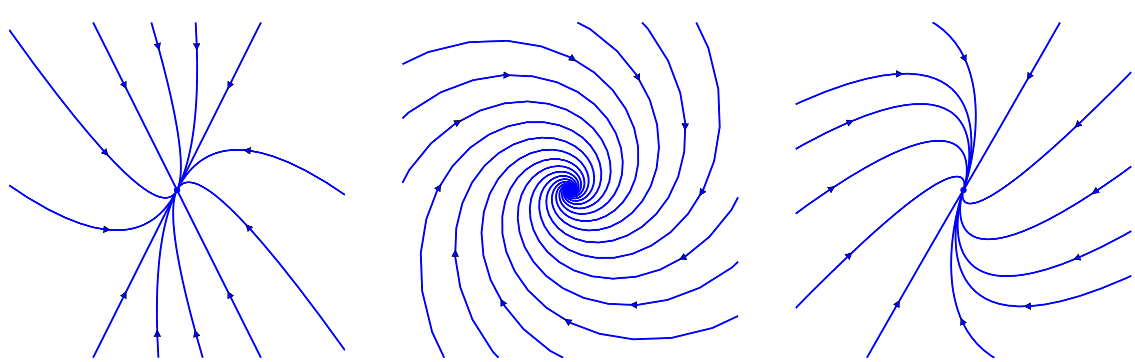
2 pt. **(a)** Wat kunt u (a priori) zeggen over (lokale) existentie en eenduidigheid van oplossingen door een willekeurig punt (t_0, u_0) in het (t, u)-vlak, waarbij $t_0 u_0 \neq 0$?

3 pt. **(b)** Bepaal voor $t_0 = u_0 = 1$ een expliciete uitdrukking voor de oplossing. Laat ook zien dat het maximale existentieinterval van deze oplossing gelijk is aan $(1/\sqrt{e}, \infty)$.

3 pt. **2.** Beschouw de differentiaalvergelijkingen $u'(t) = Au(t)$, met de volgende drie matrices $A = P, Q, R$:

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/4 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Welk van de onderstaande faseportretten hoort bij welke matrix? Motiveer uw antwoord.



(a) (b) (c)

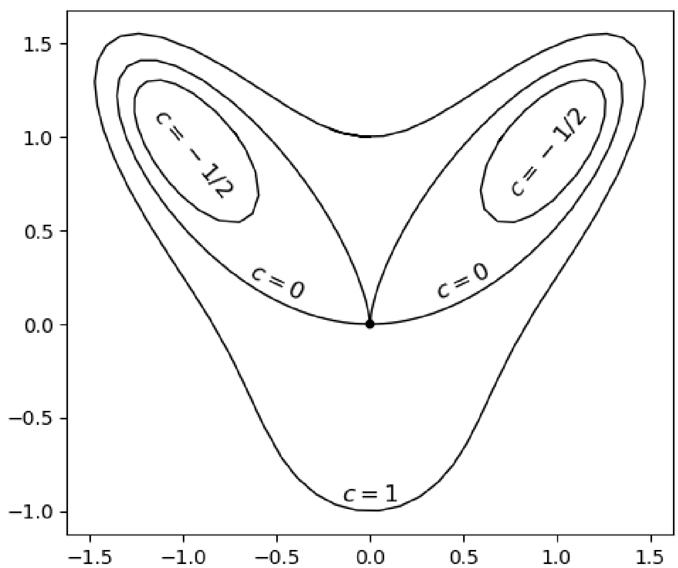
3. Bekijk het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$(*) \qquad \begin{cases} x' &= x^2 - y^3 \\ y' &= 2x(x^2 - y) \end{cases}$$

3 pt. **(a)** Bepaal de drie stationaire punten van $(*)$. Geeft linearisatie uitsluitsel over de stabiliteit van één van die drie punten?

2 pt. **(b)** Laat $E(x, y) = 2x^4 - 4x^2y + y^4$. Toon aan dat de banen van oplossingen $u(t) = (x(t), y(t))^T$ van $(*)$ gegeven worden door algebraïsche vergelijkingen van de vorm $E(x, y) = c$ met integratieconstante $c \in \mathbb{R}$.

3 pt. **(c)** De niveauverzameling van E voor $c = 0$ bestaat uit twee lussen die elkaar raken in de oorsprong. Uit hoeveel banen bestaat deze niveauverzameling, en in welke richting worden die banen doorlopen? Is de oorsprong een stabiel stationair punt?



Figuur 2: Niveauverzamelingen van E voor $c = -\frac{1}{2}, 0, 1$.

4. Bij gegeven continue functie $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ en $u_0 \in \mathbb{R}^m$ bekijken we het beginwaardeprobleem

$$(**) \qquad u'(t) = f(t, u(t)) \quad (\text{voor all } t \in [0,T]), \quad u(0) = u_0.$$

2 pt. **(a)** Herschrijf het beginwaardeprobleem $(**)$ tot een integraalvergelijking, en leg uit waarom deze integraalvergelijking equivalent is met $(**)$.

2 pt. **(b)** Om de integraalvergelijking op te lossen, passen we Picard iteratie toe. Dit levert een rij continue functies $v_k : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Hoe is deze rij functies gedefiniëerd?

2 pt. **(c)** Neem nu ook aan dat f voor zekere norm $\|\cdot\|$ op $\mathbb{R}^m$ en constante $L \geq 0$ aan een globale Lipschitz voorwaarde voldoet,

$$\|f(t,v) - f(t,\tilde{v})\| \leq L\|v - \tilde{v}\| \quad (\text{voor alle } t \in [0,T] \text{ en } v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^m).$$

Hieruit kan men afleiden (maar dat wordt niet gevraagd!) dat de rij functies $\{v_k\}$ op het interval $[0,T]$ uniform convergeert naar een continue limietfunctie v_*.
Toon aan dat deze limietfunctie oplossing is van de integraalvergelijking.

2 pt. **(d)** Laat zien (nog steeds onder de additionele aanname dat f aan een globale Lipschitz voorwaarde voldoet) dat de integraalvergelijking niet meer dan één oplossing kan hebben.
Hint: maak gebruik van de volgende vereenvoudigde versie van het lemma van Gronwall (hoeft niet bewezen te worden): Als voor zekere $\beta \geq 0$ en continue functie $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ geldt dat

$$\mu(t) \leq \beta \int_0^t \mu(s)\,\mathrm{d}s \quad (\text{voor alle } t \in [0,T]),$$

dan volgt dat $\mu(t) \leq 0$ (voor all $t \in [0,T]$).

5. We bekijken de methode van Newton om een nulpunt x_* te bepalen van een tweemaal continu differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hierbij nemen we aan dat $f'(x_*) \neq 0$.

2 pt. **(a)** Leg het principe van de methode van Newton uit, en laat zien dat dit leidt tot de iteratie

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

2 pt. **(b)** Laat zien dat er een constante $\delta > 0$ bestaat zodat de methode convergeert naar x_* voor elk startpunt $x_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$.

3 pt. **(c)** Laat zien dat er naast de constante $\delta > 0$ ook een constante $\gamma > 0$ bestaat zodat voor elk startpunt $x_0 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ bovendien geldt dat

$$|x_{k+1} - x_*| \leq \gamma |x_k - x_*|^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hint: gebruik $0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ en $0 = f(x_*)$.

6. Gegeven zijn $s \geq 1$ onderling verschillende knooppunten $c_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, s$. We benaderen de integraal $J = \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ door $J^* = \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$, waarbij P het polynoom van graad $\leq s-1$ is dat de punten $(c_i, \varphi(c_i))$ interpoleert.

2 pt. **(a)** Toon aan dat J^* te schrijven is als $J^* = \sum_i b_i^* \varphi(c_i)$ voor zekere gewichten b_i^*. Leid daarbij een expliciete uitdrukking af voor de gewichten b_i^*.

2 pt. **(b)** Beredeneer waarom de methode orde (minstens) s heeft.

7. Voor $n \geq 0$ is het Chebyshev polynoom T_n gedefineerd als het polynoom van graad n waarvoor geldt dat $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

4 pt. **(a)** Teken de grafiek van $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ en toon aan dat binnen de klasse van alle derdegraads polynomen van de vorm $S(x) = 4x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de waarde $\max_{[-1,1]} |S(x)|$ geminimaliseerd wordt door $S = T_3$.

2 pt. **(b)** Toon aan dat als we een willekeurige functie $f \in C^3[-1,1]$ kwadratisch interpoleren met knooppunten $x_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dat de interpolatiefout $|f(x) - P(x)|$ op het interval $[-1,1]$ begrensd wordt door $\frac{1}{24} \max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(3)}(\xi)|$.

8. Beschouw voor gegeven $u_0 \in \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ het beginwaardeprobleem

$$u'(t) = f(u(t)), u(0) = u_0.$$

Met stapgrootte $\tau > 0$ bepalen we met een Runge-Kutta methode met s stadia en coëfficiënten a_{ij}, b_i $(i, j = 1, 2, \ldots, s)$ benaderingen u_n van de oplossing $u(t)$ in de punten $t = t_n = n\tau$, $n \geq 1$.

2 pt. **(a)** Schrijf de relaties op die bepalen hoe u_n uit u_{n-1} volgt.

2 pt. **(b)** Bekijk het testprobleem $u'(t) = \lambda u(t), u(0) = u_0$, waarbij $\lambda, u_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Toon aan dat $u_n = R(\tau\lambda)u_{n-1}$ waarbij de functie R gedefinieerd is als $R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e$, met $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, \ldots, b_s)^T$, $e = (1, \ldots, 1)^T$.