

**Uitwerking Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen + Numerieke Methoden** (29 maart 2019) (*N.B. De puntennormering en eindcijferberekening voor dit tentamen staan vermeld op het tentamen zelf*)

**1. (a)** Ieder punt  $(t_0, u_0) \neq (0, 0)$  heeft een open omgeving  $\mathcal{E}$  waarop de functie  $f$  gedefinieerd door  $f(t, v) = \frac{v}{t} + \frac{t}{v}$  continu differentieerbaar is. Uit Corollary 2.6 van het dictaat volgt nu dat de differentiaalvergelijking een unieke oplossing heeft door  $(t_0, u_0)$  op zeker interval  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  met  $\delta > 0$ .

**(b)** Zoals beschreven op blz. 7 van het dictaat maakt de substitutie  $v = u^2$  deze Bernoulli vergelijking lineair,  $v' = \frac{2}{t}v + 2t$ . Deze vergelijking kan opgelost worden met de variatie van constanten formule, of door te vermenigvuldigen met de integrerende factor  $\mu(t) = t^{-2}$ . De laatste optie geeft  $(t^{-2}v)' = 2t^{-1}$ , en heeft als oplossing  $t^{-2}v - 1 = 2 \log t$ , waarbij gebruik gemaakt is van  $v(1) = 1$ . Dit leidt tot  $v = t^2(1 + 2 \log t)$  en dus  $u = t\sqrt{1 + 2 \log t}$ . De gevonden expliciete uitdrukking is goed gedefinieerd op het interval  $[1/\sqrt{e}, \infty)$ . De linkergrens  $t = 1/\sqrt{e}$  zelf behoort echter niet tot het (maximale) existentieinterval, omdat hier de afgeleide niet bestaat. Immers, er geldt  $\lim u(t) = 0$  (voor  $t \downarrow 1/\sqrt{e}$ ) en dus ook  $\lim u'(t) = \lim(\frac{u}{t} + \frac{t}{u}) = \infty$  (voor  $t \downarrow 1/\sqrt{e}$ ).

**2.** Het karakteristiek polynoom van  $P$  is  $\det(P - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ , dus  $P$  heeft twee verschillende eigenwaarden  $\lambda_1 = -1$  en  $\lambda_2 = -2$ . De algemene oplossing van  $u' = Pu$  luidt dus  $u(t) = c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2$ , waarbij  $v_1 = (1, 2)^T$  eigenvector is bij de eigenwaarde  $\lambda_1 = -1$  en  $v_2 = (-1, 2)^T$  eigenvector bij de eigenwaarde  $\lambda_2 = -2$ . De twee eigenruimtes (opgespannen door  $v_1$  respectievelijk  $v_2$ ) zijn duidelijk te zien in portret (a).

Het karakteristiek polynoom van  $Q$  is  $\det(Q - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ , dus  $Q$  heeft een dubbele eigenwaarde  $\lambda = -2$ . De eigenruimte heeft echter slechts dimensie 1, en wordt opgespannen door eigenvector  $v = (1, 2)^T$ . Deze eigenruimte is duidelijk te zien in portret (c).

Het karakteristiek polynoom van  $R$  is  $\det(R - \lambda I) = \lambda^2 + \frac{7}{4}\lambda + \frac{19}{4} = (\lambda + \frac{7}{8})^2 + \frac{255}{64}$ , dus  $R$  heeft twee complex geconjugeerde eigenwaarden  $\lambda_{1,2} = -\frac{7}{8} \pm \frac{1}{8}i\sqrt{255}$ . De algemene oplossing van  $u' = Ru$  is van de vorm  $u(t) = e^{-7/8t} \cos(\frac{1}{8}\sqrt{255}t)d_1 + e^{-7/8t} \sin(\frac{1}{8}\sqrt{255}t)d_2$  waarbij  $d_1$  en  $d_2$  vectoren in  $\mathbb{R}^2$  zijn (niet direct gerelateerd aan de eigenvectoren). De oplossingen beschrijven dus spiraalvormige banen naar de oorsprong, zoals in portret (b).

**3. (a)** Als we het stelsel  $(*)$  schrijven als  $u' = f(u)$ , dan zijn de stationaire punten gedefinieerd als de nulpunten van  $f$ . Een punt  $u_* = (x, y)^T$  is dus stationair als  $x^2 - y^3 = 2x(x^2 - y) = 0$ . Men leidt hier eenvoudig uit af dat er drie stationaire punten zijn:  $(0, 0)^T$ ,  $(-1, 1)^T$  en  $(1, 1)^T$ . Omdat  $f$  continu differentieerbaar is, kunnen we ‘Corollary 4.5’ uit het dictaat toepassen, die een uitspraak doet over de stabiliteitseigenschappen van een stationair punt  $u_*$  op basis van de eigenwaarden  $\lambda$  van de functionaalmatrix  $A = f'(u_*)$  in dat punt, tenzij  $\max \operatorname{Re} \lambda = 0$ . De functionaalmatrix van  $f$  in een willekeurig punt  $v = (x, y)^T$  wordt gegeven door

$$f'(v) = \begin{pmatrix} 2x & -3y^2 \\ 6x^2 - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

zodat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ voor } u_* = (0, 0)^T, \text{ en } A = \begin{pmatrix} \pm 2 & -3 \\ 4 & \mp 2 \end{pmatrix} \text{ voor } u_* = (\pm 1, 1)^T.$$

De eerste matrix heeft een dubbele eigenwaarde 0, zodat  $\max \operatorname{Re} \lambda = 0$ . De tweede matrix heeft karakteristiek polynoom  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 8$  en daarmee twee zuiver imaginaire eigenwaarden, zodat wederom  $\max \operatorname{Re} \lambda = 0$ . In beide gevallen doet ‘Corollary 4.5’ dus geen uitspraak over de stabiliteit.

(b) Er geldt

$$\frac{d}{dt} E(x, y) = \frac{\partial E}{\partial x}(x, y)x' + \frac{\partial E}{\partial y}(x, y)y'.$$

Omdat

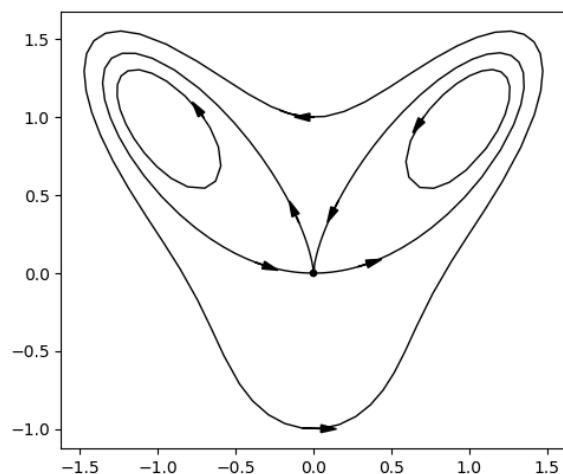
$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x}(x, y) &= 8x^3 - 8xy = 4y', \\ \frac{\partial E}{\partial y}(x, y) &= -4x^2 + 4y^3 = -4x', \end{aligned}$$

volgt dat  $\frac{d}{dt} E(x, y) = 4y'x' - 4x'y' = 0$  zodat  $E(x(t), y(t))$  constant is.

(c) Met behulp van onderdeel (a) zien we dat er één stationair punt in de niveauverzameling ligt, namelijk  $u_* = (0, 0)^T$ . Dit betekent dat de niveauverzameling uit drie banen bestaat: het stationaire punt  $u_* = (0, 0)^T$  zelf, en de beide lussen.

Om de richting te bepalen waarin de twee ‘lus’-oplossingen hun lus doorlopen, delen we het fasevlak op in twee gebieden,  $\mathcal{S}_+ = \{(x, y) : x' > 0\} = \{(x, y) : y < |x|^{2/3}\}$  en  $\mathcal{S}_- = \{(x, y) : x' < 0\} = \{(x, y) : y > |x|^{2/3}\}$ . Men ziet dan eenvoudig in dat het onderste gedeelte van beide lussen (dicht bij de oorsprong) bevat is in  $\mathcal{S}_+$ . Dit betekent dat beide lussen tegen de klok in worden doorlopen. Een andere manier om dit in te zien, is eerst aan te tonen dat de (periodieke) oplossingen behorend by  $c > 0$  hun baan tegen de klok in doorlopen. Dit laatste ziet men eenvoudig in door op te merken dat op de  $y$ -as het teken van  $x'$  tegengesteld is aan het teken van  $y$  omdat op de  $y$ -as geldt dat  $x' = x^2 - y^3 = -y^3$ . Door nu de limiet  $c \downarrow 0$  te nemen, volgt dat beide lussen ook tegen de klok in worden doorlopen.

We concluderen dat de banen doorlopen worden zoals in onderstaand diagram. De oorsprong is niet stabiel omdat er banen uit vertrekken (er zijn twee uitgaande pijlen).



4. (a)-(d) Zie het bewijs van Theorem 2.3 (stelling van Picard) in het dictaat.

**5. (a)** De methode van Newton is gebaseerd op linearisatie van  $f$  rondom de laatste benadering  $x_k$ ,

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

De volgende benadering  $x_{k+1}$  is gedefinieerd als het nulpunt van de linearisatie, d.w.z.

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Lossen we deze vergelijking op naar  $x_{k+1}$ , dan vinden we de gevraagde recurrentie.

**(b)** De methode van Newton kan geschreven worden als  $x_{k+1} = g(x_k)$  met  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ . Omdat  $f'(x_*) \neq 0$ , is de iteratiefunctie  $g$  goed gedefiniëerd op het interval  $I_\delta = [x_* - \delta, x_* + \delta]$  mits  $\delta > 0$  klein genoeg is. Ook geldt dat  $g(x_*) = x_*$ . Verder geldt dat  $g'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$ , zodat  $g'(x_*) = 0$ . Voor  $\delta > 0$  klein genoeg geldt dat  $|g'(x)| \leq 1/2$  (voor alle  $x \in I_\delta$ ). Als  $x_k \in I_\delta$ , dan volgt uit de middelwaardstelling dat

$$|x_{k+1} - x_*| = |g(x_k) - g(x_*)| = |g'(\xi_k)||x_k - x_*| \leq \frac{1}{2}|x_k - x_*|.$$

Hieruit volgt dat als  $x_0 \in I_\delta$ , dat dan alle  $x_k \in I_\delta$  en  $|x_k - x_*| \leq 2^{-k}\delta \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**(c)** Taylorontwikkeling ( $N = 1$ ) laat zien dat er een  $\xi_k$  tussen  $x_k$  en  $x_*$  bestaat zodat

$$0 = f(x_*) = f(x_k) + f'(x_k)(x_* - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(x_* - x_k)^2.$$

Trekken we hier de Newton-relatie  $0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$  vanaf, dan volgt

$$0 = -f'(x_k)(x_{k+1} - x_*) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(x_* - x_k)^2,$$

en dus

$$x_{k+1} - x_* = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x_* - x_k)^2.$$

De gevraagde afschatting volgt hieruit met

$$\gamma = \frac{1}{2} \max_{\xi, \eta \in I_\delta} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\eta)} \right| = \frac{1}{2} \frac{\max_{\xi \in I_\delta} |f''(\xi)|}{\min_{\eta \in I_\delta} |f'(\eta)|}.$$

**6. (a)** Volgens Theorem 3.1 is er een uniek interpolerend polynoom van graad  $\leq s - 1$ , en wordt dit gegeven door

$$P(x) = \sum_{i=1}^s L_i(x)\varphi(c_i), \quad \text{waarbij} \quad L_i(x) = \prod_{j:j \neq i} \frac{x - c_j}{c_i - c_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

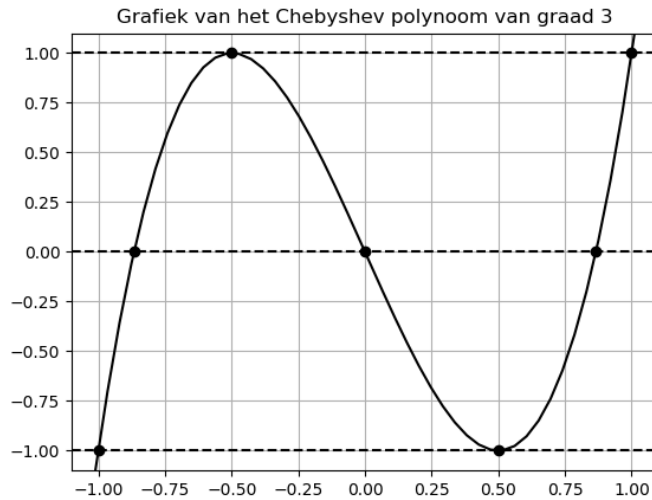
Als we deze uitdrukking voor  $P(x)$  integreren over het interval  $[0, 1]$ , dan vinden we

$$b_i^* = \int_0^1 L_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

**(b)** Omdat het interpolerend polynoom  $P$  van graad  $\leq s - 1$  uniek is, geldt dat  $P = \varphi$  als  $\varphi$  een polynoom van graad  $\leq s - 1$  is. In dat geval geldt dus ook dat  $J^* = \int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = J$ . De methode is dus exact voor alle polynomen  $\varphi$  van graad  $\leq s - 1$ , en heeft daarmee een orde (minstens)  $s$ .

7. (a) De functie  $T_3$  heeft nulpunten  $\xi_k = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , oftewel:  $\xi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

De functie heeft extrema in  $\eta_k = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , oftewel in:  $\eta_0 = 1$ ,  $\eta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\eta_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $\eta_3 = -1$ .



Merk op dat  $\max_{[-1,1]} |T_3(x)| = 1$ . Stel nu dat er een polynoom  $S(x) = 4x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  bestaat met  $\max_{[-1,1]} |S(x)| < 1$ . Dan geldt voor het verschilpolynoom  $R(x) = T_3(x) - S(x)$  dat deze graad  $\leq 2$  heeft. Verder geldt voor  $k = 0, 1, 2, 3$  dat  $T_3(\eta_k) = (-1)^k$  en  $|S(\eta_k)| < 1$ , dus het teken van  $R(\eta_k)$  is gelijk aan  $(-1)^k$ . We zien dat  $R$  tenminste drie tekenwisselingen heeft op het interval  $[-1, 1]$ , dus tenminste drie nulpunten in  $(-1, 1)$ . Omdat  $\text{graad}(R) \leq 2$ , moet  $R$  wel het nulpolynoom zijn, oftewel  $S = T_3$ . Dit is echter in tegenspraak met de aanname dat  $\max_{[-1,1]} |S(x)| < 1$ .

(b) Uit Corollary 3.3 van het dictaat (met  $m = 2$ ) volgt dat

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{3!} |M(x)| \max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(3)}(\xi)|,$$

waarbij  $M(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{1}{4}T_3(x)$ . Omdat  $\max_{[-1,1]} |T_3(x)| = 1$ , geldt dat  $|f(x) - P(x)|$  op  $[-1, 1]$  begrensd wordt door  $\frac{1}{24} \max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(3)}(\xi)|$ .

8. (a) Voor de autonome vergelijking  $u' = f(u)$  luiden de relaties

$$v_{n,i} = u_{n-1} + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(v_{n,j}) \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

$$u_n = u_{n-1} + \tau \sum_{i=1}^s b_i f(v_{n,i}).$$

(b) Het testprobleem correspondeert met de functie  $f(x) = \lambda x$ . Bovenstaande relaties nemen dan de volgende vorm aan:

$$v_{n,i} = u_{n-1} + \tau \lambda \sum_{j=1}^s a_{ij} v_{n,j} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

$$u_n = u_{n-1} + \tau \lambda \sum_{i=1}^s b_i v_{n,i}.$$

De bovenste ‘helft’ is een stelsel lineaire vergelijkingen voor de vector van tussenstadia,  $v_n = (v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,s})^T$ . Met de vectoren  $b$  en  $e$  zoals gedefiniëerd in de opgave, kunnen we bovenstaande relaties schrijven als

$$v_n = u_{n-1} e + \tau \lambda A v_n,$$

$$u_n = u_{n-1} + \tau \lambda b^T v_n.$$

De eerste vergelijking kan herschreven worden als  $(I - \tau \lambda A)v_n = u_{n-1} e$  en heeft als oplossing  $v_n = u_{n-1} (I - \tau \lambda A)^{-1} e$ . Substitutie van deze oplossing in de tweede vergelijking levert  $u_n = R(\tau \lambda) u_{n-1}$  met  $R(z) = 1 + z b^T (I - z A)^{-1} e$ .