Hertentamen Differentieerbare variëteiten
3 april 2024, 12:45–15:45

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Het gebruik van het boek, andere aantekeningen of een (grafische) rekenmachine zijn niet toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven, vergeet de laatste onderdelen op bladzijde 3 niet!
- Je kunt maximaal 35 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/35 + 1$.
- Veel succes!

Opgave 1 (3 punten)**.** Stel dat M en N gladde variëteiten zijn, en $F\colon M \to N$ een diffeomorfisme. Zij (U, φ) een kaart van N. Bewijs dat $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ een kaart is van M. (D.w.z. dat $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ bevat is in de impliciet gegeven maximale atlas voor M.)

Opgave 2. Zij $M_2(\mathbb{R})$ de vectorruimte van reële 2×2 matrices. Beschouw de determinant-afbeelding $\det\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(a) [1 punt] Bewijs kort dat deze afbeelding det glad is.

(b) [3 punten] Bewijs dat de afgeleide $d(\det)_A\colon T_A M_2(\mathbb{R}) \to T_{\det(A)}\mathbb{R}$ surjectief is voor alle $A \neq 0$.

(c) [2 punten] Bewijs dat

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}$$

een ingebedde deelvariëteit van $M_2(\mathbb{R})$ is.

Opgave 3. Stel dat M en N gladde variëteiten zijn, en $F\colon M \to N$ een diffeomorfisme. Als $X \in \mathcal{X}(M)$ een glad vectorveld op M is, definieer dan de afbeelding $F_*X\colon N \to TN$ door

$$(F_*X)(q) = \big(q, dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})\big),$$

voor $q \in N$. De rechterkant ligt in $\{q\} \times T_qN \subset TN$, wat we zoals gebruikelijk met de vectorruimte T_qN identificeren. Zo wordt F_*X een in eerste instantie niet per se glad vectorveld op N.

(a) [2 punten] Bewijs dat voor alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ en $f \in C^\infty(M)$ geldt dat

$$F_*(X + Y) = F_*X + F_*Y; \quad \text{en}$$
$$F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*X.$$

(b) [3 punten] Zij (U, φ) een kaart van N, en beschouw de kaart $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ van M. (Zie Opgave 1.) Als $q \in U$, beschouw dan de basisvector $\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q \in T_q N$ gedefinieerd door φ. Als $p \in F^{-1}(U)$, zij dan $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \in T_p M$ de basisvector gedefinieerd door $\varphi \circ F$. Zo krijgen we vectorvelden $\frac{\partial}{\partial y^j} \in \mathcal{X}(U)$ en $\frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{X}(F^{-1}(U))$. Bewijs dat

$$(F|_U)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(c) [2 punten] Zij vanaf nu $X \in \mathcal{X}(M)$. Beschouw de functies X^j op $F^{-1}(U)$ en $(F_* X)^j$ op U zo dat voor alle $p \in F^{-1}(U)$ en $q \in U$,

$$X_p = \sum_j X^j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p ;$$

$$(F_* X)_q = \sum_j (F_* X)^j(q) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q .$$

Bewijs dat $(F_* X)^j = X^j \circ F^{-1}$.

(d) [2 punten] Bewijs dat $F_* X$ een glad vectorveld op N is.

(e) [3 punten] Zij $J \subset \mathbb{R}$ een open interval, en $\gamma \colon J \to M$ een integraalkromme van X. Bewijs dat $F \circ \gamma$ een integraalkromme van $F_* X$ is.

Opgave 4. Zij $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ een gladde kromme. Stel dat γ injectief is, en dat $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. (Hier is $\dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$ de afgeleide van γ in t in de zin van calculus.) Stel ook dat er voor alle $r > 0$ een $R > 0$ is zo dat

$$\gamma^{-1}(B_0(r)) \subset (-R, R).$$

Hier is $B_0(r) \subset \mathbb{R}^n$ de open bol met middelpunt 0 en straal r.

(a) [3 punten] Bewijs dat γ proper is.

(b) [3 punten] Bewijs dat het beeld $\mathrm{im}(\gamma)$ van γ een ingebedde deelvariëteit van $\mathbb{R}^n$ is.

Omdat γ injectief is, is $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathrm{im}(\gamma)$ bijectief. We schrijven γ^{-1} voor de inverse van deze afbeelding. We beschouwen vanaf nu de gladde structuur op $\mathrm{im}(\gamma)$ waarvoor $(\mathrm{im}(\gamma), \gamma^{-1})$ een kaart is. (Dit is dezelfde gladde structuur die $\mathrm{im}(\gamma)$ krijgt als ingebedde deelvariëteit van $\mathbb{R}^n$, maar dat hoef je niet te bewijzen of te gebruiken.)

Stel dat $\omega_1, \ldots, \omega_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ compacte drager hebben. Beschouw de differentiaalvorm

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j \, dx^j \quad \in \Omega^1(\mathbb{R}^n).$$

Zij $\iota \colon \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ de inclusie-afbeelding.

(c) [3 punten] Bewijs dat $\iota^*\omega$ een volumevorm op $\mathrm{im}(\gamma)$ is, met compacte drager.

(d) [5 punten] Zij γ^j de j-de component van γ, dus $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Bewijs dat, met betrekking tot de oriëntatie op $\mathrm{im}(\gamma)$ waarvoor γ^{-1} een georiënteerde kaart is,

$$\int_{\mathrm{im}(\gamma)} \iota^*\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \omega_j(\gamma(t))(\gamma^j)'(t)\, dt.$$