Tentamen Random Graphs (NWI-WB098)

21 januari 2022, 8:30-11:30

- Er zijn 90 punten te verdienen. Uw tentamencijfer is $1 + \frac{1}{10}*$(behaalde punten).
- Voorzie al uw antwoorden van een passende motivatie.
- Uitsluitend resultaten uit het hoorcollege mogen zonder bewijs gebruikt worden.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1 (36 punten)

Beschouw de volledige graaf K_n. We kleuren alle edges onafhankelijk van elkaar met kans p rood, met kans q blauw en met kans $r = 1 - p - q$ geel. Een driehoek noemen we *trichromatisch* als de edges drie verschillende kleuren hebben. Nummer alle driehoeken, en zij X_i de indicator van de gebeurtenis dat driehoek i trichromatisch is. Zij X het aantal trichromatische driehoeken.

(a) Bepaal $\mathbb{E}[X]$.

Uitwerking

Voor alle i geldt $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}(X_i = 1) = 6pqr$. Derhalve

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} 6pqr \sim n^3 pqr.$$

(b) Noteer $i \sim j$ als X_i en X_j afhankelijk zijn en $i \neq j$. Zij

$$\Delta := \sum_i \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[X_i \cdot X_j].$$

Laat zien dat $\Delta \sim cn^4 pqr(pq + pr + qr)$ en bepaal de constante c.

Uitwerking

We kunnen Δ als volgt uitrekenen:

$$\begin{aligned}\Delta = \binom{n}{3} \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(X_i = X_j = 1) &\sim \frac{n^3}{6} \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1 \mid X_i = 1) \\ &= \frac{n^3}{6} \sum_{i \sim j} 6pqr\mathbb{P}(X_j = 1 \mid X_i = 1) = n^3 pqr \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(X_j = 1 \mid X_i = 1).\end{aligned}$$

Als driehoeken i en j afhankelijk zijn, hebben ze precies één edge en twee punten gemeenschappelijk. Het derde punt van j kan op $n - 3$ manieren gekozen worden, en de gedeelde edge op 3 manieren. De kleur van de gedeelde edge ligt vast, de twee resterende edges van j kunnen op twee manieren gekleurd worden zodat j trichromatisch wordt. Dus

$$\sum_{i \sim j} \mathbb{P}(X_j = 1 \mid X_i = 1) \sim (n - 3)(2pq + 2pr + 2qr),$$

waarmee het gevraagde volgt met $c = 2$.

(c) Bewijs dat $X = 0$ asymptotisch bijna zeker als $pqr = o(\frac{1}{n^3})$.

Uitwerking

We gebruiken de ongelijkheid van Markov:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \sim n^3 pqr = o(1).$$

Dus $X = 0$ asymptotisch bijna zeker.

(d) Bewijs dat $X \geq 1$ asymptotisch bijna zeker als $pqr = \omega(\frac{1}{n^2})$. Gebruik dat $\mathrm{Var}(X) \leq \mathbb{E}[X] + \Delta$.

Uitwerking

Hier gebruiken we de ongelijkheid van Chebyshev:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &\leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| = \mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \mathbb{E}[X]) \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]^2} \leq \frac{\mathbb{E}[X] + \Delta}{\mathbb{E}[X]^2} \sim \frac{n^3 pqr + 2n^4 pqr(pq + pr + qr)}{n^6 (pqr)^2} \\
&\leq \frac{1}{n^3 pqr} + \frac{2}{n^2 pqr} \sim \frac{2}{n^2 pqr} = \frac{1}{\omega(1)} = o(1).
\end{aligned}$$

Dus $X \neq 0$ asymptotisch bijna zeker, en dus $X \geq 1$ asymptotisch bijna zeker.

Opgave 2 (20 punten)

Zij $G = (V, E)$ een graaf met $n := |V| = m^3$ en $|E| = m^4$ voor zekere $m \geq 2$.

(a) Bewijs dat G een stabiele verzameling met m knopen bevat.

Uitwerking

De kans dat er tussen twee willekeurige knopen een edge is, is gelijk aan

$$\frac{|E|}{\binom{n}{2}} = \frac{mn}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2m}{n-1}.$$

Zij $S \subset V$ willekeurig met $|S| = k$. Zij X het aantal edges tussen knopen in S. Dan geldt

$$\mathbb{E}[X] = \binom{k}{2} \cdot \frac{2m}{n-1} = \frac{mk(k-1)}{n-1}.$$

Invullen van $k = m$ geeft $\mathbb{E}[X] = \frac{m^2(m-1)}{m^3-1} < 1$. Wegens de probabilistische methode moet er een S bestaan met $X < 1$, en aangezien $X \in \mathbb{N}$ volgt dan dat $X = 0$. Derhalve is S een stabiele verzameling.

(b) Bewijs dat G een stabiele verzameling met $\left\lceil \frac{m^2}{4} \right\rceil$ knopen bevat.

(Dit impliceert onderdeel (a), dus als u (b) oplost krijgt u ook de punten voor (a)).

Uitwerking

Zij $S \subset V$ willekeurig met $|S| = k$. Zij X het aantal edges tussen knopen in S. Dan geldt

$$\mathbb{E}[X] = \binom{k}{2} \cdot \frac{2m}{n-1} = \frac{mk(k-1)}{n-1}.$$

Stellen we $\mathbb{E}[X]$ gelijk aan $\ell \in \mathbb{R}^+$, dan volgt

$$k^2 - k = \frac{(n-1)\ell}{m},$$

met als positieve oplossing

$$k = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(n-1)\ell}{m}}.$$

Wegens de probabilistische methode moet er een S bestaan met $X \leq \ell$, en dus $X \leq \lfloor \ell \rfloor$. We kunnen nu $\lfloor \ell \rfloor$ knopen weggooien uit S en een stabiele verzameling $\tilde{S}$ overhouden. Dan

$$|\tilde{S}| = k - \lfloor \ell \rfloor \geq k - l = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(n-1)\ell}{m}} - \ell.$$

Om een zo groot mogelijke stabiele verzameling te vinden kunnen we maximaliseren over ℓ. Afgeleide naar ℓ:

$$\frac{(n-1)/m}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(n-1)\ell}{m}}} - 1$$

Nul stellen geeft

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(n-1)\ell}{m}} = \frac{n-1}{2m},$$

waarna we ℓ kunnen oplossen door te kwadrateren:

$$\ell = \frac{m}{n-1}\left(\left(\frac{n-1}{2m}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{n-1}{4m} - \frac{m}{4(n-1)}.$$

Nu volgt

$$|\tilde{S}| \geq k - l = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2m} - \frac{n-1}{4m} + \frac{m}{4(n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{4m} + \frac{m}{4(n-1)} \geq \frac{n}{4m} = \frac{m^2}{4}.$$

Alternatieve methode: slimme gok. Neem $k = \frac{m^2}{2}$ als m even. Dan volgt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{m\frac{m^2}{2}(\frac{m^2}{2} - 1)}{m^3 - 1} < \frac{m^2}{4}.$$

(Voor m oneven neem je $k = \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2}$, dan $\mathbb{E}[X] < \frac{m^2}{4} + \frac{1}{2}$.) Dus er bestaat S met $|S| = \frac{m^2}{2}$ en minder dan $\frac{m^2}{4}$ kanten. Gooi van elk van die kanten één knoop weg. Dit geeft een stabiele verzameling met minstens $\frac{m^2}{4}$ knopen. Het is ook mogelijk om $k = cm^2$ te gokken, en dan $c - c^2$ te maximaliseren. Dit geeft $c = \frac{1}{2}$ en een stabiele verzameling met $cm^2 - c^2m^2 = \frac{m^2}{4}$ knopen.

Opgave 3 (34 punten)

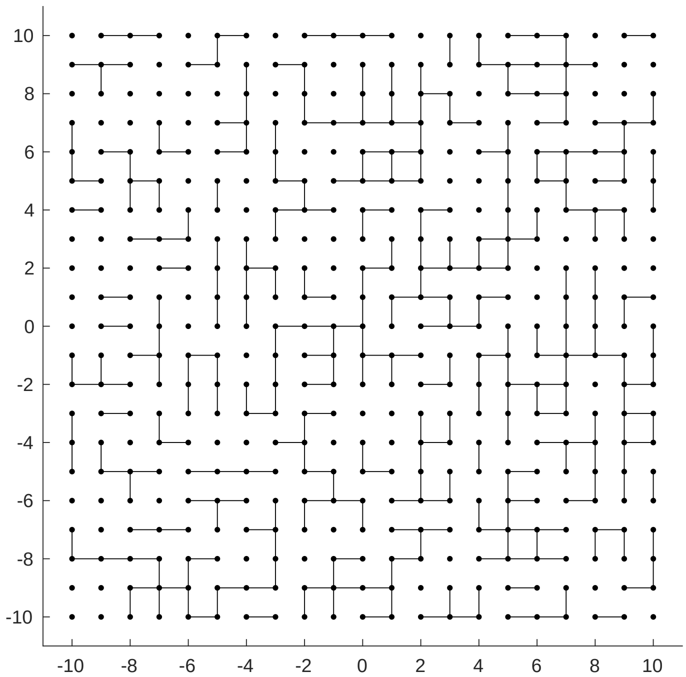
Zij V_n de verzameling van roosterpunten in het vierkant $[-n, n]$:

$$V_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}.$$

De (deterministische) graaf die ontstaat door elk tweetal punten $u, v \in V_n$ met onderlinge afstand 1 te verbinden door een edge noemen we $R_n = (V_n, \tilde{E}_n)$. Maak nu $E_n \subseteq \tilde{E}_n$ door elke edge in $\tilde{E}_n$ met kans p toe te voegen aan E_n, onafhankelijk van andere edges. Noem deze random graaf $G_n = (V_n, E_n)$. Als $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V_n$ allemaal verschillend zijn, en $\{v_{i-1}, v_i\} \in E_n$ voor $i = 1, \ldots, k$ dan is

$$(\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\})$$

een *pad van lengte k*. Zij X_n en Y_n het aantal paden van lengte n in respectievelijk G_n en R_n en met beginpunt $v_0 = (0, 0)$. Zie het plaatje voor een realisatie van G_{10} met $p = \frac{2}{5}$.



(a) Laat zien dat voor alle $n \geq 1$ geldt

$$2^n \cdot p^n \leq \mathbb{E}[X_n] \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n.$$

Uitwerking

Als een wandeling in het volledige rooster in $(0, 0)$ begint en alleen maar naar rechts en omhoog gaat, dan is het zeker een pad. Er zijn dus minstens 2^n paden van lengte n in het rooster, die elk met kans p^n in G_n zitten (ze komen nooit buiten het vierkant). Dit bewijst de ondergrens.

Een pad dat in $(0, 0)$ begint kan in vier richtingen vertrekken. Op elk volgend roosterpunt heb je hoogstens drie keuzes, want een pad kan nooit terug gaan. In het volledige rooster bestaan dus hoogstens $4 \cdot 3^{n-1}$ paden, die elk met kans p^n in G_n zitten. Dit bewijst de bovengrens.

(b) Een rij $(a_n)_{n\geq1}$ heet *subadditief* indien $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ voor alle $n, m \geq 1$. Fekete's Lemma zegt dat voor elke subadditieve rij $(a_n)_{n\geq1}$ de limiet $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ bestaat. Bewijs hiermee dat er een constante c bestaat zodat

$$\log(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(Y_n).$$

Uitwerking

We willen Fekete's Lemma toepassen op $a_n := \log(Y_n)$. Het is dus voldoende te laten zien dat voor alle $n, m \geq 1$ geldt

$$\log(Y_{n+m}) \leq \log(Y_n) + \log(Y_m).$$

Dit is equivalent met

$$Y_{n+m} \leq Y_n \cdot Y_m.$$

Er zijn $Y_n \cdot Y_m$ mogelijkheden om een pad van lengte n te verlengen met een pad van lengte m. Dit geeft een wandeling van lengte $n+m$, maar is niet altijd een pad. Omgekeerd is wel elk pad van lengte $n+m$ op te knippen in een pad van lengte n en een pad van lengte m. Dus inderdaad $Y_{n+m} \leq Y_n \cdot Y_m$, zodat de limiet

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(Y_n)$$

bestaat. Neem nu $c = e^\ell$.

(c) Bewijs dat uit (b) volgt dat voor elke $\varepsilon > 0$ en n groot genoeg geldt

$$(c-\varepsilon)^n < Y_n < (c+\varepsilon)^n.$$

Volgt uit (b) ook $Y_n \sim c^n$? Bewijs of weerleg.

Uitwerking Uit het vorige onderdeel volgt voor elke $\varepsilon > 0$ en n groot genoeg

$$\log(c-\varepsilon) < \frac{1}{n} \log(Y_n) < \log(c+\varepsilon).$$

Dit is equivalent met

$$(c-\varepsilon)^n < Y_n < (c+\varepsilon)^n.$$

Het vorige onderdeel is echter niet sterk genoeg om te concluderen dat $Y_n \sim c^n$. Tegenvoorbeeld: $Y_n = 2c^n$ voldoet niet aan $Y_n \sim c^n$, maar wel aan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(2c^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\log(c^n) + \log(2)) = \log(c) + 0.$$

(d) Toon aan dat $(c-\varepsilon)^n p^n < \mathbb{E}[X_n] < (c+\varepsilon)^n p^n$ voor elke $\varepsilon > 0$ en n groot genoeg en dat $2 \leq c \leq 3$.

Uitwerking

De eerste uitspraak volgt meteen uit het feit dat $\mathbb{E}[X_n] = Y_n \cdot p^n$. Stel nu dat $c < 2$. Kies ε zo dat $c + \varepsilon < 2$. Dan is $\mathbb{E}[X_n] < (c+\varepsilon)^n p^n$ in tegenspraak met onderdeel (a). Stel nu dat $c > 3$ en kies ε zo dat $c - \varepsilon > 3$. Voor n groot genoeg is $(c-\varepsilon)^n$ groter dan $4 \cdot 3^{n-1}$, dus ook hier krijgen we een tegenspraak met (a). Derhalve $2 \leq c \leq 3$.

(e) De rand van G_n zijn de punten $(x, y) \in V_n$ met $|x| = n$ of $|y| = n$. Bewijs dat er in G_n asymptotisch bijna zeker geen pad is van $(0, 0)$ naar de rand van G_n als $p < \frac{1}{c}$.

Uitwerking

Als er een pad is van $(0, 0)$ naar de rand, dan is er ook een pad van lengte n. Dus als $X_n = 0$, dan is er geen pad van $(0, 0)$ naar de rand.

Stel nu dat $p < \frac{1}{c}$. Kies ε zo dat $p < \frac{1}{c+2\varepsilon}$. Dan geldt

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \leq (c+\varepsilon)^n p^n < \left(\frac{c+\varepsilon}{c+2\varepsilon}\right)^n \to 0, \qquad \text{als } n \to \infty$$

Dus $X_n = 0$ asymptotisch bijna zeker, waarmee het gevraagde volgt.

EINDE