Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart u in te stemmen met de procedure zoals gepubliceerd op Brightspace. In het bijzonder wordt uw aandacht gevraagd voor de volgende punten:

1. U kunt alleen deelnemen als u van tevoren de anti-fraude verklaring ondertekend en gemaild hebt naar h.don@math.ru.nl. Dit betekent dat u
   (a) Op geen enkele wijze communiceert met derden.
   (b) Geen andere bronnen dan de cursusmaterialen raadpleegt.
2. Het tentamen duurt van 8:30 tot 11:30. Daarna hebt u een kwartier om uw handgeschreven oplossingen te scannen/fotograferen en te mailen naar h.don@math.ru.nl. De strikte deadline is dus 11:45.
3. Tijdens het tentamen ben ik telefonisch bereikbaar: 06 3393 5959.

Henk Don

Tentamen Random Graphs

30 maart 2021, 8:30-11:30

- Er zijn 90 punten te verdienen. Uw tentamencijfer is $1 + \frac{1}{10}*$(behaalde punten).
- Voorzie al uw antwoorden van een passende motivatie.
- Uitsluitend resultaten uit het hoorcollege mogen zonder bewijs gebruikt worden.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1 (20 punten)

Zij A een 9×9-matrix waarin de getallen $1, \dots, 9$ allemaal precies 9 keer voorkomen. Bewijs dat er een rij of kolom is met ten minste drie verschillende getallen.
Hint: Geef een ondergrens voor het aantal rijen of kolommen waarin i voorkomt.

Uitwerking
Er zijn ten minste 6 rijen of kolommen waarin i voorkomt. Immers, als i in r rijen en k kolommen voorkomt, dan komt i hoogstens rk keer voor. Dus moet gelden $rk \geq 9$. Dit betekent dat $r+k \geq r+\frac{9}{r}$. Deze functie heeft een minimum in $r = 3$, en dus $r + k \geq 6$.
Definieer nu de stochast X_i als volgt: kies een willekeurige rij of kolom en zij $X_i = 1$ als i daarin voorkomt. Dan $\mathbb{E}[X_i] \geq \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
Zij X het aantal verschillende getallen in die rij of kolom. Dan

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{9} X_i] = \sum_{i=1}^{9} \mathbb{E}[X_i] \geq 9 \cdot \frac{1}{3} = 3.$$

Er moet dus een rij of kolom zijn met ten minste drie verschillende getallen.

Opgave 2 (10 + 10 = 20 punten)

Beschouw $G = G_{n,p}$. Een rijtje knopen $v_1, \dots, v_k$ heet een pad als

- er een kant is tussen v_i en v_{i+1} voor alle $1 \leq i \leq k - 1$.
- alle knopen verschillend zijn, dus $v_i \neq v_j$ als $i \neq j$.

Als $v_1 = v_k$, dan heet dit een cykel. (Als we een ander startpunt nemen of de volgorde omdraaien, beschouwen we dit nog steeds als dezelfde cykel, dus bijvoorbeeld $v_3, v_2, v_1, v_k \dots, v_3$.)
Een cykel waarin alle knopen van G precies één keer voorkomen heet een Hamiltoncykel. Zij X het aantal Hamiltoncykels in G.

(a) Bestaan er k waarvoor de eigenschap *"G heeft precies k Hamiltoncykels"* monotoon is? Geef al deze waarden van k.

Uitwerking
Beschouw eerst de volledige graaf K_n. Zij v een knoop in deze graaf. Aangezien elke Hamiltoncykel door v gaat, kunnen we ons beperken tot het tellen van cykels door v. Vanuit v zijn er $(n-1)!$ manieren om een cykel te doorlopen. We doorlopen dan elke cykel in twee richtingen, dus het totaal aantal Hamiltoncykels is gelijk aan $\frac{1}{2}(n-1)!$

Als we kanten toevoegen aan een graaf, dan kan het aantal Hamiltoncykels toenemen, maar nooit afnemen. Dat betekent dat de eigenschap alleen monotoon is voor $k = 0$ en $k = \frac{1}{2}(n-1)!$.

Aanvulling na een opmerking van een wakkere student: Er zijn strikt genomen nog meer waarden van k waarvoor de eigenschap monotoon is, namelijk als er geen enkele graaf op n knopen bestaat met precies k Hamiltoncykels. Dit is bijvoorbeeld het geval als $k = \frac{1}{2}(n-1)! - 1$ (of als k negatief of groter dan het aantal Hamiltoncykels in K_n). Maar de enige waarden waarvoor de eigenschap monotoon en niet-triviaal is zijn $k = 0$ en $k = \frac{1}{2}(n-1)!$

(b) Neem nu $p = \frac{c}{n}$ met $c < e$. Toon aan dat $X = 0$ a.a.s. Gebruik eventueel Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Uitwerking

Bepaal eerst de verwachting van X. Als X_i de indicator is voor een gegeven Hamiltoncykel, dan $\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n$, dus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{2}(n-1)!p^n \sim \frac{1}{2}\sqrt{2\pi(n-1)}(\frac{n-1}{e})^{n-1}(\frac{c}{n})^n \\ &= \frac{e\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{n-1}}(\frac{n-1}{n})^n(\frac{c}{e})^n \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{n-1}}(\frac{c}{e})^n = o(1).\end{aligned}$$

Nu volgt met Markov's ongelijkheid

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] = o(1),$$

dus $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Opgave 3 (10 punten)

Zij $Y \sim \text{Bin}(m, p)$. Laat zien dat

$$\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}mp) \leq \left(\frac{(1-p)e + p}{e^{1-p/2}}\right)^m.$$

Hint: beschouw de stochast e^{m-Y}.

Uitwerking

Definiëer $\tilde{Y} := m - Y$ en merk op dat $\tilde{Y} \sim \text{Bin}(m, 1-p)$. We kunnen $\tilde{Y}$ schrijven als $\sum_{i=1}^m \tilde{Y}_i$ met $\tilde{Y}_i \sim \text{Ber}(1-p)$. Nu geldt wegens Markov's ongelijkheid

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}mp) &= \mathbb{P}(\tilde{Y} > m - \frac{1}{2}mp) \\ &= \mathbb{P}(e^{\tilde{Y}} > e^{m(1-p/2)}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\tilde{Y}}]}{e^{m(1-p/2)}}.\end{aligned}$$

Omdat $\mathbb{E}[e^{\tilde{Y}_i}] = (1-p)e^1 + pe^0$ en de $\tilde{Y}_i$ onafhankelijk zijn geldt

$$\mathbb{E}[e^{\tilde{Y}}] = \mathbb{E}\left[e^{\sum \tilde{Y}_i}\right] = \mathbb{E}\left[\prod e^{\tilde{Y}_i}\right] = \prod \mathbb{E}[e^{\tilde{Y}_i}] = ((1-p)e + p)^m.$$

Invullen geeft nu

$$\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}mp) \leq \left(\frac{(1-p)e + p}{e^{1-p/2}}\right)^m.$$

Opgave 4 **(10 + 10 + 10 + 10 = 40 punten)**

(Als een van de onderdelen niet lukt, dan kunt u het resultaat aannemen en verder gaan.)
In deze opgave beschouwen we de *random regular graph* $G_n = (V, E)$ met graad Δ. Deze graaf is geconstrueerd volgens het configuratiemodel en heeft n knopen, waarbij de graad van elke knoop gelijk is aan Δ.

(a) Zij $S \subseteq V$ en neem aan dat $|S| = cn$ voor zekere $c \in (0, \frac{1}{2}]$. Zij X_S het aantal kanten tussen S en S^c. Laat zien dat $\mathbb{E}[X_S] \geq \Delta c(1-c)n$.

Uitwerking
Voor elke halfkant die begint in een knoop in S geldt dat de kans dat deze verbonden is met een halfkant in S^c gelijk is aan

$$\frac{\Delta n - \Delta cn}{\Delta n - 1} \geq \frac{n - cn}{n} = 1 - c.$$

Het verwachte aantal kanten X_S tussen S en S^c is dus

$$\mathbb{E}[X_S] = \frac{\Delta cn(\Delta n - \Delta cn)}{\Delta n - 1} \geq \Delta c(1-c)n.$$

(b) Voor $S \subseteq V$, zij $N[S]$ de verzameling van knopen in S en hun buren:

$$N[S] := S \cup \{v \in V : \exists u \in S \text{ met } \{u, v\} \in E\}.$$

Bewijs dat voor elke $S \subseteq V$ met $|S| = cn$ geldt

$$\mathbb{P}\left(|N[S]| < \frac{c(5-c)n}{4}\right) \leq \mathbb{P}\left(X_S < \frac{\Delta c(1-c)n}{4}\right).$$

Uitwerking
Beschouw het aantal buren van S die niet in S zelf zitten, dat is dus $|N[S] \setminus S|$. Als dit aantal klein is, dan moet X_S ook klein zijn. Er geldt

$$X_S < \Delta |N[S] \setminus S|.$$

Dus voor elke S met $|S| = cn$ geldt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|N[S]| < \frac{c(5-c)n}{4}\right) &= \mathbb{P}\left(|N[S]| - |S| < \frac{c(5-c)n}{4} - cn\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Delta |N[S] \setminus S| < \frac{\Delta c(1-c)n}{4}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(X_S < \frac{\Delta c(1-c)n}{4}\right).
\end{aligned}$$

Wegens afhankelijkheden is de verdeling van X_S ingewikkeld. Men kan echter laten zien dat er onderling onafhankelijke stochasten $Y_1, \ldots, Y_{\Delta cn/2}$ bestaan met $Y_i \sim \text{Ber}(1-c)$ en $X_S \geq Y := \sum Y_i$. Er geldt dus $Y \sim \text{Bin}(\Delta cn/2, 1-c)$.

(c) Neem weer $S \subseteq V$. Laat zien dat voor alle $c \in (0, \frac{1}{2}]$ geldt

$$\mathbb{P}\left(\exists S : |S| = cn, |N[S]| < \frac{c(5-c)}{4} n\right) \leq (f(c))^n,$$

waarbij $f(c) = e^{c(1-\log(c))} \left(\frac{ce + (1-c)}{e^{1-(1-c)/2}}\right)^{\Delta c/2}$. U mag opgave 3 gebruiken.

Uitwerking
We gebruiken Opgave 3 met $m = \Delta cn/2$ en $p = 1-c$. Er geldt dan $\frac{1}{2}mp = \frac{\Delta c(1-c)n}{4}$ en dus

$$\mathbb{P}\left(X_S < \frac{\Delta c(1-c)n}{4}\right) \leq \mathbb{P}\left(Y < \frac{\Delta c(1-c)n}{4}\right) \leq \left(\frac{ce+(1-c)}{e^{1-(1-c)/2}}\right)^{\Delta cn/2}.$$

De kans dat er een verzameling S met $|S| = cn$ en zo weinig buren bestaat, voldoet dan wegens onderdeel (c) aan

$$\mathbb{P}\left(\exists S : |S| = cn, |N[S]| < \frac{c(5-c)}{4}n\right) \leq \binom{n}{cn}\left(\frac{ce+(1-c)}{e^{1-(1-c)/2}}\right)^{\Delta cn/2}.$$

De binomiaalcoëfficiënt kunnen we als volgt begrenzen:

$$\binom{n}{cn} \leq \left(\frac{en}{cn}\right)^{cn} = e^{c(1-\log(c))n},$$

waarmee het gevraagde volgt.

(d) Neem nu $\Delta = 80$. Bepaal een constante D die niet afhangt van n zodat G_n asymptotisch bijna zeker de volgende eigenschap heeft:

> Als A en B verzamelingen knopen zijn in G_n die allebei ten minste 1% van alle knopen bevatten, dan bestaan er $u \in A$ en $v \in B$ zodanig dat $d(u,v) \leq D$.

U mag gebruiken dat er voor $\Delta = 80$ een constante $a < 1$ bestaat zodat $f(c) < a$ voor alle $c \in [\frac{1}{100}, \frac{1}{2}]$.

Uitwerking
Sommeren over alle waarden van c geeft

$$\mathbb{P}\left(\exists S : \frac{n}{100} \leq |S| \leq \frac{n}{2}, |N[S]| < \frac{c(5-c)}{4}n\right) \leq \sum_{cn=\lceil \frac{n}{100}\rceil}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} (f(c))^n \leq \frac{n}{2}a^n = o(1).$$

Derhalve geldt asymptotisch bijna zeker voor elke S met $\frac{n}{100} \leq |S| \leq \frac{n}{2}$

$$|N[S]| \geq \frac{(5-c)}{4}cn \geq \frac{9}{8}|S|.$$

Stel nu dat $|A| \geq \frac{n}{100}$. Dan a.a.s. $|N^d[A]| \geq \left(\frac{9}{8}\right)^d \frac{n}{100}$. Los nu op $|N^d[A]| \geq \frac{n}{2}$. Dit geeft $d = \frac{\log(50)}{\log(9)-\log(8)} \approx 33.2$. Dus minstens de helft van de knopen zit op afstand ten hoogste 34 van A. Dit betekent dat a.a.s. geldt

$$N^{34}[A] \cap N^{34}[B] \neq \emptyset.$$

Zij nu $w \in N^{34}[A] \cap N^{34}[B]$, dan bestaan er $v \in A$ en $u \in B$ zodanig dat $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \leq 68$. Dus neem $D = 68$.

EINDE