Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart u in te stemmen met de procedure zoals gepubliceerd op Brightspace. In het bijzonder wordt uw aandacht gevraagd voor de volgende punten:

1. U kunt alleen deelnemen als u van tevoren de anti-fraude verklaring ondertekend en gemaild hebt naar h.don@math.ru.nl. Dit betekent dat u

   (a) Op geen enkele wijze communiceert met derden.

   (b) Geen andere bronnen dan de cursusmaterialen raadpleegt.

2. Het tentamen duurt van 8:30 tot 11:30. Daarna hebt u een kwartier om uw handgeschreven oplossingen te scannen/fotograferen en te mailen naar h.don@math.ru.nl. De strikte deadline is dus 11:45.

3. Tijdens het tentamen ben ik telefonisch bereikbaar: 06 3393 5959.

Henk Don

Tentamen Random Graphs

13 januari 2021, 8:30-11:30

- Er zijn 90 punten te verdienen. Uw tentamencijfer is $1 + \frac{1}{10}*$(behaalde punten).
- Voorzie al uw antwoorden van een passende motivatie.
- Uitsluitend resultaten uit het hoorcollege mogen zonder bewijs gebruikt worden.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1 (20 punten)

Beschouw de cyclische groep $\mathbb{Z}_p$, met p priem. Een deelverzameling van de vorm $\{a, a+b, a+2b, \ldots, a+(k-1)b\}$ met $a, b \in \mathbb{Z}_p$ en $b \neq 0$ heet een aritmetische progressie van lengte k in $\mathbb{Z}_p$. Hierbij staat $+$ voor optelling modulo p. Als bijvoorbeeld $p = 23$, dan is $\{5, 15, 2, 12, 22\}$ een aritmetische progressie van lengte 5, met $a = 5$ en $b = 10$. Zij nu $p \geq 7$. Bewijs dat het mogelijk is de elementen van $\mathbb{Z}_p$ te kleuren met

$$c = \left\lceil \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[4]{2}} \right\rceil$$

verschillende kleuren, zodat er geen enkele monochrome aritmetische progressie van lengte 5 ontstaat.
(Lukt dit niet, bewijs het dan voor $c = \lceil \sqrt{p} \rceil$.)

Uitwerking

Het aantal aritmetische progressies van lengte 5 is kleiner dan of gelijk aan $p(p-1)/2$. Er zijn immers $p(p-1)$ manieren om a en b te kiezen. Omdat elke aritmetische progressie ook in omgekeerde volgorde te maken is, moeten we nog delen door 2. Ter illustratie: in het voorbeeld hierboven hadden we ook $\tilde{a} = a + 4b = 22$ en $\tilde{b} = -b = 13$ kunnen nemen om dezelfde aritmetische progressie te krijgen.
Stel nu dat we de elementen van $\mathbb{Z}_p$ onafhankelijk van elkaar en met gelijke kansen kleuren. De kans dat een gegeven aritmetische progressie monochroom is, is dan $c \cdot c^{-5} = c^{-4}$. Zij X het aantal monochrome aritmetische progressies. Dan

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\text{a.p.'s}} \mathbb{P}(\text{a.p. monochroom}) \leq \frac{p(p-1)}{2 \cdot c^4} \leq \frac{p(p-1)\sqrt[4]{2}^4}{2\sqrt{p}^4} = \frac{p(p-1)}{p^2} < 1.$$

Er moet dus een kleuring bestaan waarvoor X gelijk is aan 0.

Opgave 2 (10 + 10 + 10 + 10 = 40 punten)

Beschouw $G = G_{n,p}$ met $p = n^{-4/5}$. Zij X het aantal driehoeken in G.

(a) Zij G^{Δ} de graaf die ontstaat door alle knopen en kanten die niet in een driehoek zitten te verwijderen. Laat zien dat het chromatisch getal van G^{Δ} a.a.s. gelijk is aan 3.

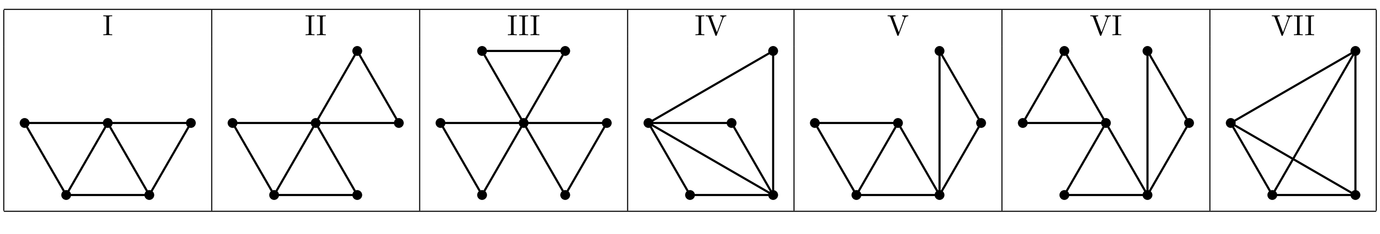
U mag gebruiken dat onderstaande grafen I,…,VII alle mogelijkheden geven waarop drie driehoeken een samenhangende graaf kunnen vormen.

(b) Bepaal constanten a en b zodat $\mathbb{E}[X] \sim a \cdot n^b$.

(c) Laat zien dat $\mathrm{Var}[X] \sim a \cdot n^b$ voor dezelfde a en b.

(d) Bepaal functies $f(n)$ en $g(n)$ zodanig dat $f(n) \sim g(n)$ en

$$f(n) \leq X \leq g(n) \qquad \text{a.a.s.}$$



Uitwerking

(a) De dichtheden van de gegeven grafen zijn

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{6}{4}$

De kleinste dichtheid is $\frac{9}{7}$. Dus voor al deze grafen is er een drempelfunctie $d(n)$ met $d(n) \geq n^{-7/9}$. Merk op: we hoeven niet te controleren of de grafen gebalanceerd zijn, want we willen alleen een ondergrens voor een drempelfunctie. Aangezien $p = n^{-4/5} = o(n^{-7/9})$, bevat $G_{n,p}$ a.a.s. geen van deze grafen. Er zijn dus nergens drie driehoeken die elkaar raken. Elke component van G^{Δ} is dus een geïsoleerde driehoek, of bestaat uit precies twee driehoeken die elkaar raken. Twee driehoeken die elkaar raken en losse driehoeken kunnen altijd met drie kleuren gekleurd worden, waaruit volgt dat het chromatisch getal a.a.s. ten hoogste 3 is.

Een drempelfunctie voor driehoeken is n^{-1}, want een driehoek is strikt gebalanceerd en heeft dichtheid 1. Aangezien $p = \omega(n^{-1})$, volgt dat G a.a.s. een driehoek bevat. Daaruit volgt dat het chromatisch getal van G^{Δ} a.a.s ten minste 3 is.

NB: Het is niet genoeg om te laten zien dat G^{Δ} geen K_4 bevat. Bijvoorbeeld  bestaat ook alleen uit driehoeken en heeft chromatisch getal 4.

(b)

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{3} p^3 \sim \frac{1}{6} n^3 \cdot n^{-3 \cdot 4/5} = \frac{1}{6} n^{3/5}.$$

(c) Nummer alle mogelijke driehoeken, en introduceer voor elk een indicator X_i, waarbij $i = 1, \ldots, \binom{n}{3}$. Dan $X = \sum_i X_i$. Met de definitie van variantie volgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(\sum_i X_i)^2] - \mathbb{E}[\sum_i X_i]^2 \\ &= \sum_i \sum_j \mathbb{E}[X_i X_j] - \sum_i \sum_j \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \end{aligned}$$

Gebruik nu symmetrie (d.w.z. voor elke i zijn de sommen over j hetzelfde) en het feit dat $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$ als X_i en X_j onafhankelijk zijn (notatie: $i \not\sim j$):

$$\mathrm{Var}[X] = \binom{n}{3} \sum_{j:1\sim j} \mathbb{E}[X_1 X_j] - \binom{n}{3} \sum_{j:1\sim j} \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_j].$$

Merk nu op dat een driehoek die afhankelijk is van X_1 precies twee punten met driehoek 1 deelt (of gelijk is aan driehoek 1). Er zijn 3 manieren om die twee punten te kiezen en $n-3$ manieren om het derde punt te kiezen. Verder geldt $\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}[X_i] = p^3$ voor alle i.

$$\sum_{j:1\sim j} (\mathbb{E}[X_1 X_j] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_j]) = \mathbb{E}[X_1^2] - p^6 + 3(n-3)(p^5 - p^6) \sim p^3.$$

Derhalve $\mathrm{Var}[X] \sim \binom{n}{3} p^3 \sim \frac{1}{6} n^{3/5}$.

NB: Met het verwaarlozen van termen moet je soms uitkijken. Als je meerdere termen hebt kunnen termen soms niet relevant lijken, maar dat wel zijn. Een fout voorbeeld:

$$n = n^2 - n(n-1) \sim n^2 - n^2 = 0.$$

(d) De ongelijkheid van Chebyshev geeft

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var[X]}}{c^2}.$$

We willen nu c zo kiezen dat het rechterlid naar 0 gaat, en dat $\mathbb{E}[X] - c \sim \mathbb{E}[X] + c$. Neem bijvoorbeeld $c = n^{1/2}$ (of een willekeurige andere macht tussen $b/2 = 3/10$ en $b = 3/5$). Dan geldt wegens Chebyshev

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - c < X < \mathbb{E}[X] + c) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var[X]}}{c^2} = 1 - \frac{\Theta(n^{3/5})}{n} = 1 - o(1).$$

Bovendien geldt

$$\mathbb{E}[X] - c \sim \frac{1}{6}n^{3/5} - n^{1/2} \sim \frac{1}{6}n^{3/5} + n^{1/2} \sim \mathbb{E}[X] + c.$$

Dus de volgende keuze voldoet:

$$f(n) = \mathbb{E}[X] - c = \binom{n}{3}n^{-12/5} - \sqrt{n}, \qquad g(n) = \mathbb{E}[X] + c = \binom{n}{3}n^{-12/5} + \sqrt{n}.$$

Opgave 3 (10 + 10 + 10 = 30 punten)

In deze opgave beschouwen we de *random regular graph* $G_n = (V, E)$ met graad 4. Deze graaf is geconstrueerd volgens het configuratiemodel en heeft n knopen, waarbij de graad van elke knoop gelijk is aan 4.

(a) Geef een zo goed mogelijke ondergrens voor de diameter van G_n.

(b) Zij $S \subsetneq V$ met $|S| = k \geq 1$. Zij A_S de gebeurtenis dat er geen kanten zijn tussen S en S^c. Bewijs dat

$$\mathbb{P}(A_S) \leq \frac{1}{\binom{2n}{2k}}.$$

(c) Bewijs dat de graaf asymptotisch bijna zeker samenhangend is. Hint: laat zien dat $\binom{2n}{2k} \geq (\frac{n}{k})^{2k}$.

Uitwerking

(a) Zij $v \in V$ willekeurig. Het aantal buren op afstand d is ten hoogste $4 \cdot 3^{d-1}$. Het aantal knopen $N^{\leq d}$ op afstand ten hoogste d van v voldoet dus aan

$$N^{\leq d} \leq 1 + \sum_{k=1}^{d} 4 \cdot 3^{k-1} = 1 + 4 \cdot \frac{3^d - 1}{3 - 1}.$$

Nemen we nu d gelijk aan de diameter, dan geldt $N^{\leq d} = n$, en geeft herschrijven van bovenstaande ongelijkheid

$$d \geq \frac{\log(n+1) - \log(2)}{\log(3)}.$$

(b) De knopen in S hebben in totaal $4k$ halfkanten. Als A_S optreedt, dan worden deze allemaal met elkaar verbonden. Derhalve

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_S) &= \frac{4k-1}{4n-1} \cdot \frac{4k-3}{4n-3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{4n-4k+1} \\
&\leq \frac{4k}{4n} \cdot \frac{4k-2}{4n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4n-4k+2} \\
&= \frac{2k}{2n} \cdot \frac{2k-1}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2n-2k+1} \\
&= \frac{(2k)! \cdot (2n-2k)!}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{2k}}.
\end{aligned}$$

Opmerkingen:

i Een halfkant wordt willekeurig verbonden met een andere halfkant, en dus niet met een andere knoop. De kans dat $v \in S$ verbonden wordt in S is daarom niet precies $|S|/n$.

ii Kanten zijn afhankelijk, dus je kunt niet zomaar producten van kansen nemen. Als je al weet dat sommige kanten in S blijven, dan verkleint dat de kans dat andere kanten ook in S blijven, omdat er minder mogelijkheden over zijn.

iii Als je weet dat elke halfkant in S verbonden is met een andere halfkant in S, dan weet je ook dat elke halfkant in S^c verbonden is met een andere halfkant in S^c. Die kansen hoef je dus niet met elkaar te vermenigvuldigen.

(c) De kans dat de graaf samenhangend is, is gelijk aan de kans dat er geen enkele $S \subseteq V$ is waarvoor A_S optreedt. Het is voldoende om verzamelingen met ten hoogste $n/2$ knopen te beschouwen, want de gebeurtenis A_S is gelijk aan de gebeurtenis A_{S^c}. De kans dat G niet samenhangend is, is gelijk aan

$$\mathbb{P}(\exists S \subseteq V : A_S) \leq \sum_{S \subseteq V : |S| \leq \frac{n}{2}} \mathbb{P}(A_S) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{2k}} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{(\frac{n}{k})^{2k}} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}(\frac{n}{k})^k} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

Hierbij hebben we de volgende (on)gelijkheden gebruikt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k, \qquad \text{en dus} \qquad \binom{2n}{2k} \geq \left(\frac{2n}{2k}\right)^{2k} = \left(\frac{n}{k}\right)^{2k}.$$

We gaan verder met het begrenzen van de kans.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{k}{n}\right)^k &\leq \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor} \left(\frac{k}{n}\right)^k + \sum_{k=\lceil \sqrt[3]{n} \rceil}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{k}{n}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor} \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)^1 + \sum_{k=\lceil \sqrt[3]{n} \rceil}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\leq \sqrt[3]{n} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{n} + \sum_{k=\lceil \sqrt[3]{n} \rceil}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&\leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{n}} = o(1).
\end{aligned}$$

Derhalve

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(G_n \text{ samenhangend}) = 1.$$

NB: Vaak werd betoogd dat $\mathbb{P}(A_S)$ naar 0 gaat voor elke S. Daaruit volgt echter niet dat $\mathbb{P}(\exists S : A_S)$ naar 0 gaat. Vergelijk bijvoorbeeld hiermee:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty.$$

Hoewel de termen steeds kleiner worden, wordt de som steeds groter.

EINDE