Door deel te nemen aan dit tentamen verklaart u in te stemmen met de procedure zoals gepubliceerd op Brightspace. In het bijzonder wordt uw aandacht gevraagd voor de volgende punten:

1. U kunt alleen deelnemen als u van tevoren de anti-fraude verklaring ondertekend en gemaild hebt naar h.don@math.ru.nl. Dit betekent dat u

   (a) Op geen enkele wijze communiceert met derden.

   (b) Geen andere bronnen dan de cursusmaterialen raadpleegt.

2. Het tentamen duurt van 8:30 tot 11:30. Daarna hebt u een kwartier om uw handgeschreven oplossingen te scannen/fotograferen en te mailen naar h.don@math.ru.nl. De strikte deadline is dus 11:45.

3. Tijdens het tentamen ben ik telefonisch bereikbaar: 06 3393 5959.

Henk Don

Tentamen Random Graphs

8 april 2020, 8:30-11:30

- Er zijn 80 punten te verdienen. Uw tentamencijfer is $1 + \frac{9}{80}$∗(behaalde punten).
- Voorzie al uw antwoorden van een passende motivatie.
- Uitsluitend resultaten uit het hoorcollege mogen zonder bewijs gebruikt worden.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1 (10 + 10 = 20 punten)

Beschouw het lichaam $\mathbb{F}_3^5 = \{0,1,2\}^5$. We noteren $(0,0,0,0,0)$ als $\mathbf{0}$. Optelling gaat per coördinaat en modulo 3, bijvoorbeeld

$$(0,0,1,2,2) + (0,2,2,0,2) = (0,2,0,2,1).$$

Een deelverzameling $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \mathbb{F}_3^5$ heet een *driespan* als $x_1 + x_2 + x_3 = \mathbf{0}$.

(a) Laat zien dat er precies 9801 verschillende driespannen bestaan.

(b) Bewijs met behulp van (a) dat er een deelverzameling $B \subseteq \mathbb{F}_3^5$ bestaat met $|B| = 20$ zodanig dat B strikt minder dan 5 driespannen bevat.

Uitwerking

(a) Stel dat $x, y \in \mathbb{F}_3^5$ met $x \neq y$. Dan is er een unieke $z \in \mathbb{F}_3^5$ zodat $x + y + z = \mathbf{0}$, namelijk $z = -(x+y)$. Dus voor elk tweetal in $\mathbb{F}_3^5$ is er ten hoogste één driespan. We moeten nog controleren dat $x \neq z$, en $y \neq z$, zodat er precies één driespan is.

Stel dat $x = z$. Dan geldt $y = -(x+z) = -2x = x$. Dit is een tegenspraak, dus $x \neq z$. Analoog $y \neq z$. Dus inderdaad kan elk tweetal in $\mathbb{F}_3^5$ op precies één manier tot een driespan uitgebreid worden. Aangezien een driespan drie tweetallen bevat volgt hieruit

$$\#\text{driespannen} = \frac{\#\text{tweetallen}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \binom{3^5}{2} = \frac{3^5 \cdot (3^5 - 1)}{3 \cdot 2} = 9801.$$

Alternatief 1. Er zijn 9 manieren om $a, b, c \in \mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ te kiezen zodat $a + b + c = 0$ (namelijk a, b, c allemaal gelijk of allemaal verschillend). In $\mathbb{F}_3^5$ zijn er dus 9^5 mogelijkheden om x_1, x_2 en x_3 te kiezen met som $\mathbf{0}$. Hier moeten we van aftrekken de gevallen $x_1 = x_2 = x_3$, dat zijn er 3^5. In de resterende gevallen zijn x_1, x_2 en x_3 allemaal verschillend, omdat er minstens één coördinaat is waarin ze alle drie verschillend zijn. We moeten nog wel delen door 6, omdat we anders elk drietal 6 keer tellen, bijvoorbeeld $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_2, x_1, x_3\}$. Hiermee vinden we

$$\#\text{driespannen} = \frac{9^5 - 3^5}{6} = 9801.$$

Alternatief 2. Er zijn 9 manieren om $a, b, c \in \mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ te kiezen zodat $a + b + c = 0$ (namelijk a, b, c allemaal gelijk of allemaal verschillend). Voor een driespan geldt dat x_1, x_2 en x_3 in minstens één coördinaat verschillen. In zulke coördinaten zijn er 6 keuzes, in de overige coördinaten zijn er 3 keuzes. En we kunnen ook nog kiezen in welke coördinaten ze verschillen. We moeten weer niet vergeten te delen door 6, en vinden dan

$$\#\text{driespannen} = \frac{\binom{5}{1} \cdot 6 \cdot 3^4 + \binom{5}{2} \cdot 6^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{3} \cdot 6^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{4} \cdot 6^4 \cdot 3^1 + 6^5}{6} = 9801.$$

(b) De kans dat een willekeurig drietal ook een driespan is, is gegeven door

$$\mathbb{P}(\text{driespan}) = \frac{\#\text{driespannen}}{\#\text{drietallen}} = \frac{\frac{1}{3}\binom{3^5}{2}}{\binom{3^5}{3}} = \frac{3^5! \cdot 3! \cdot (3^5-3)!}{3 \cdot 3^5! \cdot 2! \cdot (3^5-2)!} = \frac{1}{3^5-2} = \frac{1}{241}.$$

Zij B een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{F}_3^5$ met 20 elementen, en zij X_B het aantal driespannen in B. Dan geldt

$$\mathbb{E}[X_B] = \frac{1}{241} \cdot \binom{20}{3} = \frac{1140}{241} < \frac{1205}{241} = 5.$$

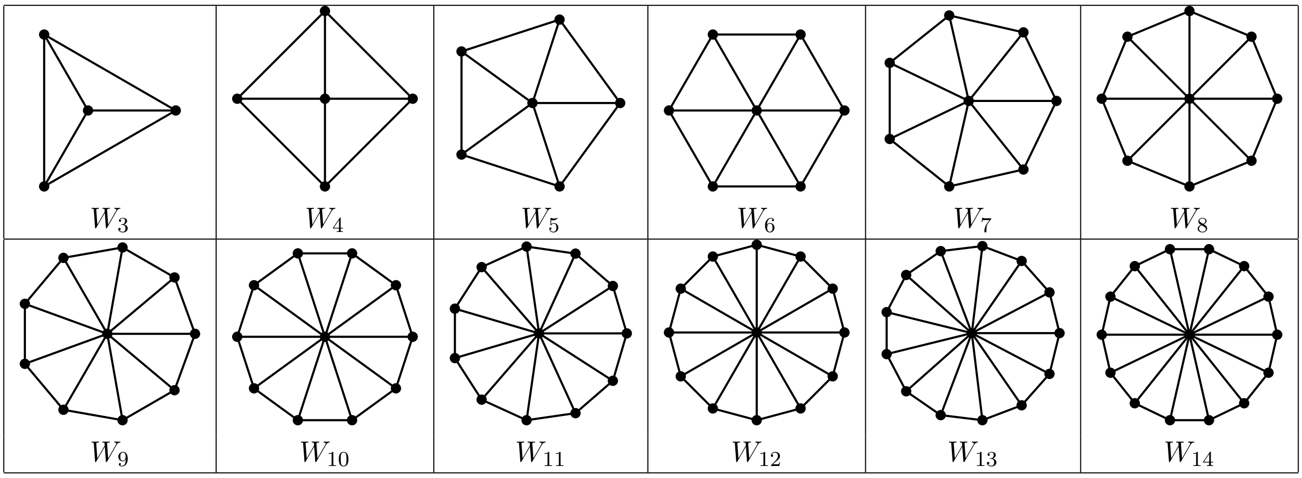
Derhalve geeft Markov's ongelijkheid

$$\mathbb{P}(X_B \geq 5) \leq \frac{\mathbb{E}[X_B]}{5} < 1.$$

Er moet dus een B bestaan met 20 elementen en strikt minder dan 5 driespannen.

Opgave 2 (10 + 10 + 10 = 30 punten)

Zij $W_k, k \geq 3$ de wielgraaf met k spaken. Zie plaatjes voor de wielgrafen $W_3, \ldots, W_{14}$.



(a) Zij $X_{n,k}$ het aantal keer dat W_k voorkomt in de Erdős-Rényi graaf $G_{n,p}$. Laat zien dat er een constante c_k bestaat zodat (voor vaste k en $n \to \infty$)

$$\mathbb{E}[X_{n,k}] \sim c_k \cdot n^{k+1} p^{2k},$$

en bepaal deze constante c_k.

(b) Laat zien dat het mogelijk is $p = p_k(n)$ zo te kiezen dat

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(W_k \subseteq G_{n,p}) = \frac{1}{2}.$$

en bepaal $p_k(n)$.

(c) Zij $X := \max\{k : W_k \subseteq G_{n,p}\}$ het *wielgetal* van $G_{n,p}$. Neem $p = p_k(n)$ en bewijs dat het wielgetal zich als volgt concentreert:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X = k-1) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}.$$

(Als (b) niet gelukt is, neem dan $p = (c_k \cdot n^{k+1})^{-1/(2k)}$.)

Uitwerking

(a) We moeten tellen op hoeveel manieren de wielgraaf W_k kan ontstaan in $G_{n,p}$. De wielgraaf W_k heeft $k+1$ knopen. We kiezen dus knopen $v_1, \ldots, v_{k+1}$ in $G_{n,p}$. Als we de knopen in de wielgraaf labelen, dan zijn er $(k+1)!$ manieren om de gelabelde wielgraaf op $v_1, \ldots, v_{k+1}$ af te beelden. Delen door het aantal automorfismen van W_k geeft het aantal manieren om een ongelabelde wielgraaf op $v_1, \ldots, v_{k+1}$ te maken. Het aantal automorfismen is $2k$.

Gegeven het aantal mogelijke wielgrafen moeten we nog vermenigvuldigen met de kans dat alle kanten van zo'n wielgraaf in $G_{n,p}$ zitten. Aangezien er $2k$ kanten in W_k zitten, vinden we

$$\mathbb{E}[X_{n,k}] = \binom{n}{k+1}\frac{(k+1)!}{2k}p^{2k} = \frac{n!}{(n-k-1)!}\frac{1}{2k}p^{2k} \sim \frac{n^{k+1}}{2k}p^{2k},$$

waarbij we gebruiken dat $n - c \sim n$ voor elke constante c. De gezochte c_k is dus $1/(2k)$.

(b) We gebruiken een stelling uit de collegeaantekeningen. We laten eerst zien dat de wielgraaf strikt gebalanceerd is. De wielgraaf heeft $2k$ kanten en $k+1$ knopen, dus de dichtheid voldoet aan $\rho(W_k) = 2k/(k+1) > 1$.

Elke deelgraaf H van W_k die niet het middelste punt bevat heeft dichtheid kleiner dan 1. Zij nu H een deelgraaf is die wel het middelste punt bevat, en verder $m < k$ punten op de rand. Dan heeft H ten hoogste m spaken en $m-1$ randedges. Derhalve

$$\rho(H) \leq \frac{2m-1}{m+1} = 2 - \frac{3}{m+1} < 2 - \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1} = \rho(W_k),$$

en dus is W_k strikt gebalanceerd. Hiermee vinden we de drempelfunctie

$$p_k(n) = d \cdot n^{-\frac{1}{\rho(W_k)}} = d \cdot n^{-\frac{k+1}{2k}},$$

waarbij d een constante is. Volgens de stelling vinden we met deze keuze van $p_k(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_k \not\subseteq G_{n,p}) = e^{-\frac{d^{2k}}{2k}}.$$

Het rechterlid is gelijk aan $\frac{1}{2}$ indien $d = (2k\log(2))^{\frac{1}{2k}}$, dus als

$$p_k(n) = (2k\log(2))^{\frac{1}{2k}} \cdot n^{-\frac{k+1}{2k}}.$$

(c) We weten al dat W_k met kans $\frac{1}{2}$ voorkomt, dus dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \frac{1}{2}$. We laten nu zien dat er geen grotere wielgrafen voorkomen. Zij $m > k$. Dan

$$\mathbb{E}[X_{n,m}] \sim c_m \cdot n^{m+1} p_k(n)^{2m} = c_m \cdot n^{m+1} \cdot d \cdot \left(n^{-\frac{k+1}{2k}}\right)^{2m} = c_m \cdot d \cdot n^{\frac{k-m}{k}}.$$

Verder geldt dat

$$c_m \cdot d = \frac{(2k\log(2))^{\frac{1}{2k}}}{2m} < \frac{(2k\log(2))}{2k} = \log(2).$$

Met Markov's ongelijkheid vinden we nu (voor n groot genoeg)

$$\mathbb{P}(X_{n,m} > 0) = \mathbb{P}(X_{n,m} \geq 1) \leq \mathbb{E}[X_{n,m}] \leq \log(2) \cdot n^{\frac{k-m}{k}}.$$

Sommeren over m leidt nu tot

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists m > k : X_{n,m} > 0) &\leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n,m} > 0) \leq \log(2) \sum_{m=k+1}^{\infty} n^{\frac{k-m}{k}} \\ &= \log(2) \sum_{m=1}^{\infty} \left(n^{-\frac{1}{k}}\right)^m = \frac{\log(2) \cdot n^{-\frac{1}{k}}}{1 - n^{-\frac{1}{k}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Dit betekent dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq k) = 1$.

Vervolgens tonen we nog aan dat W_{k-1} asymptotisch bijna zeker voorkomt. Een drempelfunctie voor W_{k-1} is $n^{-\frac{k}{2(k-1)}}$. Omdat $\frac{k}{2(k-1)} > \frac{k+1}{2k}$ volgt hier uit dat,

$$p_k(n) = \omega(p_{k-1}(n))$$

en dus dat $W_{k-1} \subseteq G_{n,p}$ asymptotisch bijna zeker. M.a.w. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq k-1) = 1$. Asymptotisch bijna zeker geldt dus $k-1 \leq X \leq k$, waarmee volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = k-1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}.$$

Opgave 3 **(10 + 10 + 10 = 30 punten)**

Beschouw het configuratiemodel op n knopen, waarbij de graden $D_1, \ldots, D_n$ van de knopen getrokken worden uit een Pois(μ) verdeling. Er geldt dus

$$\mathbb{P}(D_i = k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, \qquad \mathbb{E}[D_i] = \mathrm{Var}(D_i) = \mu.$$

Zij S de som van de graden. Wegens de wet van de grote aantallen voldoet S dan aan $S \sim n\mu$.
Zij X_i het aantal zelflussen van knoop i en zij $X := \sum_{i=1}^n X_i$ het totaal aantal zelflussen.

(a) Toon aan dat

$$\mathbb{E}[X_i \mid D_i = k] \sim \frac{k(k-1)}{2n\mu}.$$

(b) Bepaal $\mathbb{E}[X]$.

Ook in dit model spreken we van een 'giant component' als de grootste component een positieve fractie van de knopen bevat als $n \to \infty$. In het tentamen van januari hebben we het volgende aangetoond: als v een knoop is en u een willekeurige buur van v, dan voldoet de verwachte graad D_u van u aan

$$\mathbb{E}[D_u] = \mathbb{E}[D_1] + \frac{\mathrm{Var}(D_1)}{\mathbb{E}[D_1]}.$$

Gebruik deze gelijkheid bij het beantwoorden van de volgende vraag.

(c) Voor welke waarden van μ zal er een giant component ontstaan?
(U hoeft geen rigoureus bewijs te geven, wel een argument dat uw antwoord plausibel maakt.)

Uitwerking

(a) Gegeven dat $D_i = k$ kunnen we de halfkanten van knoop i nummeren van 1 t/m k. Zij nu

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{halfkant } j \text{ van knoop } i \text{ is de helft van een zelflus} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan geldt $X_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k X_{i,j}$. Derhalve vinden we voor $k \geq 2$ dat

$$\mathbb{E}[X_i \mid D_i = k] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \mathbb{E}[X_{i,j} \mid D_i = k] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \mathbb{P}[X_{i,j} = 1 \mid D_i = k] = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \frac{k-1}{S-1} \sim \frac{k(k-1)}{2n\mu}.$$

Alternatief De kans dat twee gegeven halfkanten met elkaar verbonden worden is asymptotisch gelijk aan $\frac{1}{n\mu}$, omdat een vaste halfkant $S-1 \sim n\mu$ keuzes heeft. Bij een knoop van graad k zijn er $\binom{k}{2}$ potentiële zelflussen. Voor elk kunnen we een indicator $Y_{i,j}$ invoeren, zodat $X_i = \sum_j Y_{i,j}$. Dan volgt

$$\mathbb{E}[X_i \mid D_i = k] = \sum_j \mathbb{E}[Y_{i,j} \mid D_i = k] = \sum_j \mathbb{P}[Y_{i,j} = 1 \mid D_i = k] \sim \binom{k}{2}\frac{1}{n\mu}.$$

(b) Om $\mathbb{E}[X_i]$ te bepalen conditioneren we op D_i, de graad van knoop i:

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}[X_i \mid D_i = k]\mathbb{P}(D_i = k).$$

Het resultaat van (a) invullen in $\mathbb{E}[X_i]$ geeft

$$\mathbb{E}[X_i] = \sum_{k=2}^\infty \frac{k(k-1)}{2n\mu}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = \frac{\mu}{2n}e^{-\mu}\sum_{k=2}^\infty \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{\mu}{2n}.$$

Het verwachte aantal zelflussen voldoet dus aan

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n\mathbb{E}[X_i] = \frac{\mu}{2}.$$

(c) Neem een willekeurige knoop, en maak een boom door te kijken naar de buren, de buren van de buren, etc. In het begin van dit exploratieproces is de verwachte graad van nieuwe knopen

$$\mathbb{E}[D_1] + \frac{\mathrm{Var}(D_1)}{\mathbb{E}[D_1]} = \mu + \frac{\mu}{\mu} = \mu + 1.$$

De kans dat we een loop maken is in het begin verwaarloosbaar (zie ook het resultaat van (b)). We maken dus een boom waarin de verwachte graad van de wortel gelijk is aan μ, en de verwachte graden van overige knopen gelijk aan $\mu + 1$. Dit is bij benadering een Galton-Watson boom met verwachte offspring μ (elke knoop heeft één edge naar oudere knoop, en verwacht aantal kinderen is μ).

We verwachten een giant component dan en slechts dan als de Galton-Watson boom positieve kans heeft om oneindig groot te worden. Dus voor $\mu > 1$ verwachten we wel een giant en voor $\mu \leq 1$ niet. Men kan ook rigoureus bewijzen dat dit inderdaad is wat er gebeurt.

EINDE