# Tentamen Random Graphs

21 januari 2020, 8:30-11:30

---

- Er zijn 90 punten te verdienen. U krijgt er 10 gratis.
- Voorzie al uw antwoorden van een passende motivatie.

---

**Opgave 1 (20 punten)**

Drie spelers spelen boter, kaas en eieren in een $6 \times 6 \times 6$ speelveld (dus in 3 dimensies en met drie kleuren). Ze bepalen steeds met een dobbelsteen wie er aan de beurt is (wie het hoogst gooit mag een zet doen).
Wie zes op een rij heeft (recht of diagonaal) wint het spel. Is het mogelijk dat het spel onbeslist eindigt?

**Uitwerking**
Er zijn 3x6x6 (recht) +6x6 (korte diagonaal) +4 (lange diagonaal)= 148 mogelijkheden om zes op een rij te maken. Als we willekeurig met gelijke kansen zouden kleuren, dan is de kans dat een rijtje monochroom is $1/3^5 = 1/243$. Het verwachte aantal monochrome rijtjes is $148/243 < 1$, dus er bestaat een kleuring zonder monochrome rijtjes. Het is duidelijk dat die kleuring in het spel kan optreden (hier hebben we die dobbelsteen nodig).

**Opgave 2 (30 punten)**

In deze opgave kijken we naar het aantal *geïsoleerde* kanten in $G_{n,p}$. Als $G = (V, E)$ een graaf is, dan heet $\{u, v\}$ een geïsoleerde kant als $\{u, v\} \in E$ en $\deg(u) = \deg(v) = 1$. Zij $X$ het aantal geïsoleerde kanten in $G_{n,p}$ en neem $p = p(n) = n^{-\alpha}$ voor $\alpha > 0$.

(a) Toon aan dat

$$\mathbb{E}[X] \sim \frac{1}{2} n^{2-\alpha} \left( \frac{1 + o(1)}{e} \right)^{2n^{1-\alpha}}.$$

(b) Bewijs dat voor $\alpha \geq 1$ geldt

$$\mathbb{E}[X] \sim \begin{cases} \frac{1}{2} n^2 p & \alpha > 1, \\ \frac{1}{2e^2} n^2 p & \alpha = 1. \end{cases}$$

(c) Bewijs dat voor $0 < \alpha < 1$ geldt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X = 0) = 1.$$

(d) Interpreteer de resultaten van de vorige twee onderdelen.

**Uitwerking**

(a) Er geldt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{\{u,v\}\in V} \mathbb{P}(\{u,v\} \text{ is een geïsoleerde kant}) \\ &= \binom{n}{2} p(1-p)^{2(n-2)} \\ &\sim \frac{1}{2} n^{2-\alpha}(1-n^{-\alpha})^{2n} \\ &= \frac{1}{2} n^{2-\alpha}((1-n^{-\alpha})^{n^\alpha})^{2n^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2} n^{2-\alpha}\left(\frac{1+o(1)}{e}\right)^{2n^{1-\alpha}},\end{aligned}$$

waarbij we de limiet $\lim_{x\to\infty}(1-1/x)^x = 1/e$ gebruikt hebben.

**Opmerking:** Vaak werden bij deze opgave wat subtiele fouten gemaakt. Daarom hier een korte toelichting.

Wat gevraagd wordt in dit onderdeel is niet hetzelfde als aantonen dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[X]}{\frac{1}{2} n^{2-\alpha}\left(\frac{1+o(1)}{e}\right)^{2n^{1-\alpha}}} = 1.$$

Deze laatste notatie betekent namelijk dat voor elke $f(n) = o(1)$ de limiet gelijk is aan 1. De formulering in de vraag betekent echter dat er een $f(n) = o(1)$ bestaat zodanig dat gelijkheid geldt. Dit is echt iets anders.

Stel bijvoorbeeld dat

$$g(n) = \frac{1}{n}.$$

Dan geldt dus $g(n) = o(1)$. Maar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{o(1)}$$

kan van alles zijn, bijvoorbeeld 0 of 1 of $\pi^2/6$ of $\infty$.

Om vergelijkbare redenen moet je soms uitkijken met vervangen van een 1 in een uitdrukking door $1+o(1)$ of met redeneringen van het type "$f(n) \sim g(n)$, dus $h(f(n)) \sim h(g(n))$". Ook hier een voorbeeld:

$$1 + \frac{1}{n} \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

want beide functies hebben limiet 1. Er geldt echter niet

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\sqrt{n}}},$$

want nu heeft het linkerlid limiet $e$ en het rechterlid limiet 1.

(b) Voor $\alpha > 1$ geldt $1-\alpha < 0$, dus $n^{1-\alpha} \to 0$ en derhalve

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+o(1)}{e}\right)^{2n^{1-\alpha}} = 1.$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{E}[X] \sim \frac{1}{2} n^{2-\alpha} = \frac{1}{2} n^2 p.$$

Voor $\alpha = 1$ vinden we $1-\alpha = 0$, dus $n^{1-\alpha} = 1$. Derhalve

$$\mathbb{E}[X] \sim \frac{1}{2} n^{2-\alpha}\left(\frac{1+o(1)}{e}\right)^{2} \sim \frac{1}{2e^2} n^2 p.$$

(c) Voor $\alpha < 1$ schrijven we

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &\sim \frac{1}{2}n^{2-\alpha}\left(\frac{1+o(1)}{e}\right)^{2n^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}e^{(2-\alpha)\log(n)-2n^{1-\alpha}+\log(1+o(1))2n^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}e^{(2-\alpha)\log(n)-(1-o(1))2n^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}e^{-(1-o(1))2n^{1-\alpha}} \to 0.\end{aligned}$$

Markov's ongelijkheid $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X]$ geeft nu dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq 1) \geq 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X] = 1 - 0 = 1.$$

(d) Merk eerst op dat het verwachte aantal kanten asymptotisch gelijk is aan $\frac{1}{2}n^2p$. Verder geldt dat grote $\alpha$ correspondeert met kleine $p$.

Voor $p$ klein ($p = n^{-\alpha}$ met $\alpha > 1$) vinden we dus dat het verwachte aantal geïsoleerde kanten asymptotisch gelijk is aan het verwachte aantal kanten. Met andere woorden, (bijna) alle kanten zijn geïsoleerd.

Voor $p = \frac{1}{n}$ gaat het aantal geïsoleerde kanten nog steeds naar oneindig, maar nu is het aantal niet-geïsoleerde kanten niet meer verwaarloosbaar. De kans dat een willekeurige kant geïsoleerd is, is nu $\frac{1}{e^2} \approx 0.135$.

Voor $p$ groot ($p = n^{-\alpha}$ met $\alpha < 1$) zijn er asymptotisch bijna zeker geen geïsoleerde kanten. Dus alle aanwezige kanten grenzen aan andere kanten.

**Opgave 3 (20 punten)**

Bewijs dat $R(5,5) \leq 62$.
U mag gebruiken dat $R(3,5) = 14$, $R(4,4) = 18$ en dat

$$R(k+1,l+1) \leq R(k,l+1) + R(k+1,l), \qquad k,l \in \mathbb{N}.$$

**Uitwerking**
We begrenzen eerst $R(4,5)$.

- Kleur de kanten van $G = K_n$ rood en blauw.
- Stel dat er een knoop $v$ is met 14 uitgaande rode kanten. De buren van $v$ bevatten een rode $K_3$ of een blauwe $K_5$. De graaf $G$ bevat dan een rode $K_4$ of een blauwe $K_5$.
- Stel dat er een knoop $v$ is met 18 uitgaande blauwe kanten. De buren van $v$ bevatten een rode $K_4$ of een blauwe $K_4$. De graaf $G$ bevat dan een rode $K_4$ of een blauwe $K_5$.
- Stel $n = 31$ en elke knoop heeft $\leq 13$ rode kanten. Allemaal 13 kan niet, want het aantal rode kanten is dan $(13 \times 31)/2 \notin \mathbb{N}$. Er moet een knoop zijn met $\leq 12$ rode en dus $\geq 18$ blauwe kanten. Dus $G$ bevat een rode $K_4$ of een blauwe $K_5$.

Hieruit volgt dat $R(4,5) \leq 31$. Invullen in Erdős-Szekeres geeft nu

$$R(5,5) \leq 31 + 31 = 62.$$

**Opmerking:** In het huiswerk zat een som die hier op leek. Met het resultaat daarvan zou vrij eenvoudig volgen dat $R(5,5) \leq 62$. Het huiswerk is echter bedoeld om te oefenen met de stof. Het was niet de bedoeling om resultaten uit het huiswerk zonder bewijs te gebruiken op het tentamen. Op het tentamen moet je laten zien dat je de sommen echt zelf kunt maken. Daarom had ik ook in de opgave vermeld wat er wel gebruikt mocht worden. Wellicht had ik duidelijker op moeten schrijven dat alleen dat gebruikt mocht worden. Daarom heb ik toch de helft van de punten toegekend indien het resultaat uit het huiswerk correct werd toegepast.

**Opgave 4 (20 punten)**

Beschouw het configuratiemodel op $n$ knopen waarbij de graden onafhankelijk van elkaar getrokken zijn uit een verdeling $D$ die voldoet aan $\mathbb{E}[D^2] < \infty$ en $\mathbb{P}(D = 0) = 0$.
Zij $v$ een willekeurige knoop in de resulterende graaf, en zij $u$ een willekeurige buur van $v$. Zij $D_u$ de graad van $u$. Laat zien dat $\mathbb{E}[D_u]$ (voor $n \to \infty$) voldoet aan

$$\mathbb{E}[D_u] \sim \frac{\mathbb{E}[D^2]}{\mathbb{E}[D]}.$$

U hoeft in deze opgave geen rekening te houden met eventuele dubbele kanten of zelfloops.

Hint: kijk eerst naar $\mathbb{P}(D_u = k)$. Hoe wordt de graaf geconstrueerd?

**Uitwerking**

In het configuratiemodel worden halfkanten willekeurig gepaard. Het is dus waarschijnlijker dat een gegeven halfkant van $v$ naar een knoop met veel halfkanten gaat dan naar een knoop met weinig halfkanten. Iets preciezer: de kans dat deze willekeurige buur $u$ graad $k$ heeft voldoet aan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_u = k) &= \frac{\text{aantal halfkanten van knopen met graad } k}{\text{totaal aantal halfkanten}} \\ &\sim \frac{k \times \text{aantal knopen met graad } k}{n\mathbb{E}[D]} \\ &\sim \frac{k \cdot n \cdot \mathbb{P}(D = k)}{n \cdot \mathbb{E}[D]} = \frac{k \cdot \mathbb{P}(D = k)}{\mathbb{E}[D]}.\end{aligned}$$

Hier gebruikten we dat aantallen convergeren naar de verwachting als $n \to \infty$. Voor de verwachting van $D_u$ geldt dus

$$\mathbb{E}[D_u] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(D_u = k) \sim \frac{1}{\mathbb{E}[D]} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(D = k) = \frac{\mathbb{E}[D^2]}{\mathbb{E}[D]}.$$

Ter aanvulling: Merk op dat $D_u$ dus een grotere verwachting heeft dan $D$, aangezien

$$\frac{\mathbb{E}[D^2]}{\mathbb{E}[D]} = \frac{\mathrm{Var}[D] + \mathbb{E}[D]^2}{\mathbb{E}[D]} = \mathbb{E}[D] + \frac{\mathrm{Var}[D]}{\mathbb{E}[D]}.$$

Dit geeft de zogenaamde *Friendship Paradox*: je vrienden hebben waarschijnlijk meer vrienden dan jij zelf (hoewel de meeste mensen het tegenovergestelde schijnen te denken).

**EINDE**