RINGEN EN LICHAMEN

Tentamen, dinsdag 24 januari 2017, 12:30–15:30.

— Schrijf op elk blad dat je inlevert je naam. Schrijf op de eerste pagina ook het nummer van je collegekaart.
— Geef volledige en duidelijke argumenten voor de beweringen die je doet. Je mag alle resultaten gebruiken die zijn behandeld, mits je steeds duidelijk maakt wat je gebruikt.
— Schrijf *leesbaar* en lever geen kladwerk in. Stukken tekst die niet gemakkelijk zijn te ontcijferen worden genegeerd.

Opgave 1. Zij R een commutatieve ring met $1 \neq 0$.

(i) (Theorievraag) Geef de definities van de begrippen *priemideaal* en *maximaal ideaal*.
(ii) (Theorievraag) Zij $I \subset R$ een ideaal. Bewijs dat I een priemideaal is dan en slechts dan als de ring R/I een domein is.
(iii) Geef een expliciet voorbeeld van een priemideaal in de ring $R = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^2)$ dat niet een maximaal ideaal is. Bewijs dat het voorbeeld dat je geeft voldoet aan het gevraagde.

Opgave 2. Zij $M_2(\mathbb{Z})$ de ring van 2×2 matrices met gehele coëfficiënten. Laat $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ en $I = A^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, en zij $\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to M_2(\mathbb{Z})$ het homomorfisme gegeven door

$$\varphi(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \cdots + a_n \cdot A^n\,.$$

Je hoeft niet na te gaan dat φ inderdaad een homomorfisme van ringen is. Definieer de deelverzameling $R \subset M_2(\mathbb{Z})$ door

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(i) Laat zien dat R een commutatieve deelring is van $M_2(\mathbb{Z})$.
(ii) Bewijs dat $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)$.
(iii) Zij $J \subset R$ het ideaal dat wordt voortgebracht door het element $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Bewijs dat J een maximaal ideaal is. Hoeveel elementen heeft R/J ?

Opgave 3. Laat $f = 20X^3 - 120X^2 - 160X + 140$ en $g = X^4 + 3X + 3$.

(i) Ontbind f en g in irreducibele factoren in $\mathbb{Z}[X]$ en ook in $\mathbb{F}_7[X]$.
(ii) Laat zien dat g in $\mathbb{F}_{49}[X]$ ontbindt als een product van lineaire factoren.

Ga verder op de achterkant

Opgave 4. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$ een *reëel* nulpunt van het polynoom $X^5 + 7X^4 + X^3 + 14X^2 + 7$.

(i) Bewijs dat het minimumpolynoom van α over $\mathbb{Q}$ gegeven is door $f_{\min}^{\alpha} = X^3 + 7X^2 + 7$.

(ii) Bepaal rationale getallen c_0, c_1, c_2 zo dat

$$(1 + \alpha^2)^{-1} = c_0 + c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \alpha^2 \, .$$

(iii) Zij $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ een reëel getal dat transcendent is over $\mathbb{Q}$. Is $1 + \alpha\beta^{-1}$ algebraïsch over $\mathbb{Q}$ of transcendent? Motiveer je antwoord.

Opgave 5. Beschouw het lichaam $K = \mathbb{Q}\big(i\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}\big)$.

(i) Bewijs dat K een ontbindingslichaam is van het polynoom $X^3 - 5$ over $\mathbb{Q}$.

(ii) Bepaal $[K : \mathbb{Q}]$.