Hertentamen Inleiding Meetkunde
29 maart 2021, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 25 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/25 + 1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Veel succes!

Opgave 1. (1+3+2 punten)
Beschouw de lijnen

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 4\};$$
$$m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 6y = 10\}$$

in $\mathbb{R}^2$.

(a) Geef kort aan waarom l en m hetzelfde punt op oneindig hebben in het uitgebreide Euclidische vlak $\mathbb{E}(\mathbb{R}^2)$.

Beschouw de bijectie $f\colon \mathbb{E}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ gegeven door

$$f(x, y) = [x : y : 1]$$
$$f(P_\infty) = [x : y : 0]$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, waarbij P_∞ het punt op oneindig is van de lijn door de oorsprong en $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Geef $a, b, c \in \mathbb{R}$ zo dat de lijn $f(l^*) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ bestaat uit de lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$ die bevat zijn in het vlak

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}.$$

Geef net zo'n beschrijving van $f(m^*)$.

(c) Vind het beeld onder f van het gemeenschappelijke punt op oneindig van l en m. *Hint:* voor welk getal $a \in \mathbb{R}$ loopt de lijn

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = a\}$$

door de oorsprong?

Opgave 2. (3+2 punten) In deze opgave werken we met een abstract projectief vlak. Laat l en m twee verschillende lijnen zijn in dit projectieve vlak. Laat P een punt zijn dat buiten deze twee lijnen ligt. Voor $X \in l$ schrijven we $f(X) \in m$ voor het unieke snijpunt van de lijn door X en P met m. Dit definieert een afbeelding $f\colon l \to m$.

(a) Bewijs dat f injectief is.

(b) Bewijs dat f surjectief is.

Hint: een plaatje tekenen voor jezelf kan helpen.

Opgave 3. (2+5 punten) Beschouw de lijnen

$$l_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\};$$
$$l_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$$

in $\mathbb{R}^2$. Zij $f\colon l_1^* \to l_2^*$ de projectie vanuit de oorsprong.

(a) Beschouw de vectoren

$$\vec{s} = (0, 1), \quad \vec{r}_1 = (1, -1), \quad \vec{r}_2 = (1, 0).$$

Bewijs dat

$$l_1 = \{\vec{s} + x \cdot \vec{r}_1 : x \in \mathbb{R}\};$$
$$l_2 = \{\vec{s} + x \cdot \vec{r}_2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Je mag vanaf nu gebruiken dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ ongelijk aan 1,

$$f(\vec{s} + x \cdot \vec{r}_1) = \left(\frac{x}{1 - x}, 1\right).$$

(b) Nu identificeren we l_1^* met $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ met behulp van de steun- en richtingsvectoren $\vec{s}$ en $\vec{r}_1$, en identificeren we l_2^* met $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ met behulp van de steun- en richtingsvectoren $\vec{s}$ en $\vec{r}_2$. Laat zien dat, met die identificatie, de afbeelding $f\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ gegeven is door

$$f([x : y]) = [x : y - x].$$

Opgave 4. (2+2+3 punten) Beschouw de deelverzameling

$$C = \{z \in \mathbb{H} : (z - 3)(\bar{z} - 3) = 4\}$$

van het bovenhalfvlak $\mathbb{H}$.

(a) Geef een meetkundige beschrijving van de verzameling C, en concludeer dat dit een (niet-Euclidische) lijn in $\mathbb{H}$ is.

Beschouw de afbeelding $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gegeven door

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z} - 3}.$$

(b) Bewijs dat f een Möbiustransformatie is.

(c) Het beeld $f(C)$ van C onder f is weer een lijn in $\mathbb{H}$. Bepaal welke lijn dat is. *Hint:* Bereken $|f(z)|^2$ als $z \in C$.