Hertentamen Inleiding Meetkunde
29 maart 2021, 8:30–10:30 uur

- Schrijf je naam op ieder blad dat je inlevert.
- Licht je antwoorden toe, voor de argumentatie zijn ook punten gereserveerd.
- Na afloop mag je dit opgavenblad meenemen.
- Je kunt maximaal 25 punten verdienen. Als je n punten hebt, dan is je tentamencijfer $9n/25 + 1$. Voor je eindcijfer voor het vak komen hier nog de bonuspunten voor je inleveropgaven bij.
- Veel succes!

Opgave 1. (1+3+2 punten)
Beschouw de lijnen

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 4\};$$
$$m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 6y = 10\}$$

in $\mathbb{R}^2$.

(a) Geef kort aan waarom l en m hetzelfde punt op oneindig hebben in het uitgebreide Euclidische vlak $\mathbb{E}(\mathbb{R}^2)$.

Beschouw de bijectie $f : \mathbb{E}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ gegeven door

$$f(x, y) = [x : y : 1]$$
$$f(P_\infty) = [x : y : 0]$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, waarbij P_∞ het punt op oneindig is van de lijn door de oorsprong en $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Geef $a, b, c \in \mathbb{R}$ zo dat de lijn $f(l^*) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ bestaat uit de lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$ die bevat zijn in het vlak

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; ax + by + cz = 0\}.$$

Geef net zo'n beschrijving van $f(m^*)$.

(c) Vind het beeld onder f van het gemeenschappelijke punt op oneindig van l en m. *Hint:* voor welk getal $a \in \mathbb{R}$ loopt de lijn

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = a\}$$

door de oorsprong?

Oplossing. (a) De lijnen l en m lopen evenwijdig, en hebben dus hetzelfde punt op oneindig.

(b) Als $(x, y) \in l$, en we schrijven $f(x, y) = [x' : y' : z']$, dan

$$2x' + 3y' - 4z' = 0.$$

Net zo, als $(x, y) \in m$, en we schrijven $f(x, y) = [x' : y' : z']$, dan

$$4x' + 6y' - 10z' = 0.$$

(c) De lijnen l en m lopen evenwijdig aan de lijn

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}.$$

Dat is de lijn door de oorsprong en $(3, -2)$. Dus $f(P_\infty) = [3 : -2 : 0]$.

Opgave 2. (3+2 punten) In deze opgave werken we met een abstract projectief vlak. Laat l en m twee verschillende lijnen zijn in dit projectieve vlak. Laat P een punt zijn dat buiten deze twee lijnen ligt. Voor $X \in l$ schrijven we $f(X) \in m$ voor het unieke snijpunt van de lijn door X en P met m. Dit definieert een afbeelding $f : l \to m$.

(a) Bewijs dat f injectief is.

(b) Bewijs dat f surjectief is.

Hint: een plaatje tekenen voor jezelf kan helpen.

Oplossing. (a) Als $X_1, X_2 \in l$ en $f(X_1) = f(X_2) =: Y$, dan liggen X_1 en X_2 beide op de lijn door Y en P. Ze liggen ook op de lijn l en zijn dus beide gelijk aan het unieke snijpunt van deze lijnen.

(b) Zij $Y \in m$. Zij X het snijpunt van l met de lijn door Y en P. Dan is Y het snijpunt van m met de lijn door X en P, dus $f(X) = Y$.

Opgave 3. (2+5 punten) Beschouw de lijnen

$$l_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\};$$
$$l_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$$

in $\mathbb{R}^2$. Zij $f : l_1^* \to l_2^*$ de projectie vanuit de oorsprong.

(a) Beschouw de vectoren

$$\vec{s} = (0, 1), \quad \vec{r}_1 = (1, -1), \quad \vec{r}_2 = (1, 0).$$

Bewijs dat

$$l_1 = \{\vec{s} + x \cdot \vec{r}_1 : x \in \mathbb{R}\};$$
$$l_2 = \{\vec{s} + x \cdot \vec{r}_2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Je mag vanaf nu gebruiken dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ ongelijk aan 1,

$$f(\vec{s} + x \cdot \vec{r}_1) = \left(\frac{x}{1-x}, 1\right).$$

$\vec{s}$ een steunvector is voor zowel l_1 als l_2. Bewijs dat $\vec{r}_1$ een richtinsgvector is voor l_1, en dat $\vec{r}_2$ een richtingsvector is voor l_2.

Beschouw een punt

$$p = \vec{s} + x \cdot \vec{r}_1 \in l_1,$$

voor $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat er $x', \lambda \in \mathbb{R}$ zijn zo dat

$$f(p) = (x', 1) = (\lambda x, \lambda(1-x)).$$

Geef een expliciete uitdrukking voor $f(p)$, als $p \neq (1,0)$.

(b) Nu identificeren we l_1^* met $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ met behulp van de steun- en richtingsvectoren $\vec{s}$ en $\vec{r}_1$, en identificeren we l_2^* met $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ met behulp van de steun- en richtingsvectoren $\vec{s}$ en $\vec{r}_2$. Laat zien dat, met die identificatie, de afbeelding $f\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ gegeven is door

$$f([x:y]) = [x : y - x].$$

Oplossing. (a) Een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ligt op l_1 dan en slechts dan als $y = 1 - x$. Dat wil zeggen

$$(x, y) = (x, 1-x) = \vec{s} + x \cdot \vec{r}_1.$$

Een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ligt op l_2 dan en slechts dan als $y = 1$. Dat wil zeggen

$$(x, y) = (x, 1) = \vec{s} + x \cdot \vec{r}_2.$$

(b) Een punt $\vec{s} + x \cdot \vec{r}_1 \in l_1$ correspondeert met

$$[x : 1] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2).$$

Als $p \neq (1,0)$, dus $x \neq 1$, dan wordt p door f afgebeeld op

$$\left(\frac{x}{1-x}, 1\right) = \vec{s} + \frac{x}{1-x}\vec{r}_2,$$

wat correspondeert met

$$\left[\frac{x}{1-x} : 1\right] = [x : 1 - x] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2).$$

Dus, als $y \neq 0$ en $y \neq x$,

$$f([x:y]) = f([x/y : 1]) = [x/y : 1 - x/y] = [x : y - x].$$

Als $x = y$, dan correspondeert $[x : y] = [x : x] = [1 : 1] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ met $\vec{s} + \vec{r}_1 = (1, 0) \in l_1$. Dat wordt geprojecteerd op het punt op oneindig van l_2, dat correspondeert met $[1 : 0] = [x : x - y]$.

En $[1 : 0]$ correspondeert met het punt op oneindig op l_1, wat wordt afgebeeld op $(-1, 1) = \vec{s} - \vec{r}_2$. En dat punt correspondeert met

$$[-1 : 1] = [x : y - x].$$

als $x = 1$ en $y = 0$.

Opgave 4. (2+2+3 punten) Beschouw de deelverzameling

$$C = \{z \in \mathbb{H} : (z - 3)(\bar{z} - 3) = 4\}$$

van het bovenhalfvlak $\mathbb{H}$.

(a) Geef een meetkundige beschrijving van de verzameling C, en concludeer dat dit een (niet-Euclidische) lijn in $\mathbb{H}$ is.

Beschouw de afbeelding $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gegeven door

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z} - 3}.$$

(b) Bewijs dat f een Möbiustransformatie is.

(c) Het beeld $f(C)$ van C onder f is weer een lijn in $\mathbb{H}$. Bepaal welke lijn dat is. *Hint:* Bereken $|f(z)|^2$ als $z \in C$.

Oplossing. (a) C is de halve cirkel met middelpunt 3 en straal 2.
(b) Als $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $ad - bc < 0$, dan is

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

een Möbiustransformatie. Nemen we $a = 0$, $b = c = 1$ en $d = -3$, dan is dit de afbeelding f. En $ad - bc = -1 < 0$.

(c) Als $z \in C$, dan is

$$|f(z)|^2 = \frac{1}{|\bar{z} - 3|^2} = \frac{1}{|z - 3|^2} = \frac{1}{4}.$$

Dus $f(C)$ is de halve cirkel met middelpunt 0 en straal $1/2$.