Uitwerking Tentamen Logica (6 ec), 20 juni 2017

1. Een *ideaal* in een tralie L is een niet-lege deelverzameling $I \subset L$ zodat $I \neq L$ en:
(a) als $x, y \in I$ dan $x \vee y \in I$;
(b) als $x \in L$, $y \in I$, en $x \leq y$, dan $x \in I$.
Een ideaal I is *maximaal* als $I \subset J$ voor een ideaal J impliceert $I = J$.

Bewijs met het Lemma van Zorn dat ieder ideaal in een tralie met maximaal element bevat is in een maximaal ideaal.

Definieer de poset $(P, \leq)$ van alle idealen in L die het gegeven ideaal I bevatten, met $\subset$ als $\leq$. Ga de condities voor toepassing van het Lemma van Zorn na:

- P is niet leeg want I zit erin.
- Als een keten $\{I_i\}$ in P zit dan zit $\cup_i I_i$ ook in P (en dit is dan een maximaal element van de keten):
  (a) Als $x, y \in \cup_i I_i$, dan zijn er i en j met $x \in I_i$ en $y \in I_j$, omdat het een keten is geldt $I_i \subset I_j$ of omgekeerd, stel het eerste, dan $x, y \in I_j$ en dus $x \vee y \in I_j \subset \cup_i I_i$, dus $x \vee y \in \cup_i I_i$.
  (b) Als $x \in L$, $y \in \cup_i I_i$, en $x \leq y$, dan $y \in I_j$ voor zekere j, dus $x \in I_j \subset \cup_i I_i$, dus $x \in \cup_i I_i$.
  (c) De conditie $I \neq L$ is equivalent met $1 \notin I$ (waarbij 1 het maximale element is van L). Omdat $1 \notin I_i$ geldt ook $1 \notin \cup_i I_i$, zodat $\cup_i I_i \notin L$ (deze stap in het bewijs is niet waar als L geen maximaal element heeft, dan kan het wel degelijk zo zijn dat $I_i \notin L$ voor alle i terwijl $\cup_i I_i = L$, neem bijvoorbeeld $L = \mathbb{N}$ met $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$).

  Het Lemma van Zorn geeft P een maximaal element I_m. Stel ten slotte dat $I_m \subset J$, voor een ideaal J. Dan bevat J ook I (want $I \subset I_m \subset J$) en dus $J \in P$. Als $I_m \neq J$, dan was I_m geen maximaal element van P, tegenspraak. Dus $J = I_m$.

2. Deze opgave gaat over een nog eenvoudigere logische theorie dan propositielogica. Er zijn drie logische symbolen, namelijk $\prec$, $\not\prec$ en $\perp$ (en verder niets!). Stel S is een verzameling symbolen (zoals in propositielogica). Dan zijn alle uitspraken α over S van de volgende vorm: $p \prec q$, of $p \not\prec q$ (waarbij $p, q \in S$), of $\perp$.
Formele bewijzen gebruiken de volgende regels à la Natuurlijke Deductie:

$$\text{I. } \frac{\alpha}{\alpha} \qquad \text{II. } \frac{p \prec q \qquad q \prec r}{p \prec r} \qquad \text{III. } \frac{p \prec p}{\perp} \qquad \text{IV. } \frac{\alpha \qquad \neg\alpha}{\perp} \qquad \text{V. } \frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \cdots \\ \cdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg\alpha}$$

In IV en V is $\neg(p \prec q)$ een afkorting voor $(p \not\prec q)$ en analoog $\neg(p \not\prec q) \equiv (p \prec q)$.
Zoals gebruikelijk schrijven we $\Sigma \vdash \alpha$ als α kan worden afgeleid uit een bepaalde verzameling uitspraken Σ. De *semantiek* van deze logica is als volgt:

- een *interpretatie* is een partiële ordening $\leq$ op S, waarbij we zoals wel vaker noteren $p < q$ desda $p \leq q$ en $p \neq q$.
- we zeggen dat $\leq \models (p \prec q)$ desda $p < q$, $\leq \models (p \not\prec q)$ desda $p \not< q$, en $\leq \not\models \perp$.
- een interpretatie $\leq$ heet een *model* van Σ als $\leq \models \sigma$ voor alle $\sigma \in \Sigma$;
- we noteren $\Sigma \models \alpha$ als α waar is in alle modellen van Σ.

(a) Bewijs netjes via uit de deductieregels dat $\{p \prec q, r \not\prec q\} \vdash r \not\prec p$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \prec q \quad r \not\prec q \quad [r \prec p]}{r \prec q}}{\perp}}{r \not\prec p}$$

Achtereenvolgens gebruikt: regels II, IV, V.

(b) Bewijs de *gezondheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \vDash \alpha$.

Als het bewijs van $\Sigma \vdash \alpha$ uit $n = 1$ stap bestaat, dan is $\alpha \in \Sigma$ en geldt $\Sigma \vDash \alpha$ per definitie van $\vDash$ en van een model: $\Sigma \vDash \alpha$ betekent immers dat α waar is in alle modellen $\leq$ van Σ, maar $\leq$ is precies een model van Σ als α waar is voor alle $\alpha \in \Sigma$. Stel nu dat de claim voor een bewijs van n regels klopt, de stap naar $n + 1$ gaat via een van de regels I - V.

- Regel I is triviaal.
- Regel II: uit $\Sigma \vDash (p \prec q)$ en $\Sigma \vDash (q \prec r)$ volgt dat voor iedere part. ordening $\leq$ geldt $p \leq q$ en $q \leq r$, dus $p \leq r$ uit transitiviteit van $\leq$, dus $\Sigma \vDash (p \prec r)$.
- Regel III: $\Sigma(p \prec p)$ betekent dat voor iedere part. ordening $\leq$ geldt $p < p$, dit is nooit waar, de conclusie $\leq \vDash \perp$ is ook niet waar, zodat de implicatie $\Sigma(p \prec p) \Rightarrow \leq \vDash \perp$ waar is.
- Regel IV: analoog.
- Regel V: voor het bewijs van $\perp$ uit $\Sigma \cup \{\alpha\}$, i.e. $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \perp$, geldt de inductiehypothese, zodat $\Sigma \cup \{\alpha\} \vDash \perp$. Dit is volgens de interpretatie-regel voor $\perp$ een tegenspraak, zodat $\Sigma \cup \{\alpha\}$ geen model $\leq$ heeft. Neem een model $\leq$ voor Σ, dan geldt $\leq \vDash \alpha$ ofwel $\leq \vDash \neg\alpha$. In het eerste geval is $\leq$ een model van $\Sigma \cup \{\alpha\}$, zodat geldt $\leq \vDash \neg\alpha$. Dit argument geldt voor ieder model $\leq$, zodat $\Sigma \vDash \neg\alpha$.

(c) Bewijs ook de *volledigheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vDash \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$.

i. Definieer een relatie $\leq$ op S door $p < q$ desda $\Sigma \vdash (p \prec q)$ en laat zien dat dit een partiële ordening is (mits Σ consistent is).

Da axioma's op $<$ zijn transitiviteit en $p \not< p$. De eerste volgt direct uit deductieregel II. De tweede houdt in dat $\Sigma \vdash (p \prec p)$ niet waar is; stel wel, dan volgt uit regel III dat $\Sigma \vdash \perp$, maar Σ is consistent. Dus $\Sigma \vdash (p \prec p)$ en dus $p \not< p$.

ii. Laat zien dat deze interpretatie een model van Σ is.

Als $\sigma \in \Sigma$ van de vorm $\sigma \equiv p \prec q$ is, dan geldt uiteraard $\Sigma \vdash p \prec q$ en dus $p < q$ i.e. $\leq \vDash \sigma$. Als $\sigma \in \Sigma$ van de vorm $\sigma \equiv p \not\prec q$ is, dan geldt evenzo $\Sigma \vdash (p \not\prec q)$, maar we moeten bewijzen dat $\Sigma \nvdash (p \prec q)$, wat niet hetzelfde is. Stel echter $\Sigma \vdash (p \prec q)$, dan volgt uit $\Sigma \vdash (p \not\prec q)$ en regel IV dat $\Sigma \vdash \perp$, maar Σ is consistent, zodat uit het ongerijmde volgt $\Sigma \nvdash (p \prec q)$, oftewel $p \not< q$. Dus in alle gevallen volgt: $\sigma \in \Sigma \Rightarrow \leq \vDash \sigma$.

iii. Bewijs nu de contrapositief van volledigheid, i.e. $\Sigma \nvdash \alpha \Rightarrow \Sigma \nvDash \alpha$.

Stel $\Sigma \nvdash \alpha$, dan is α niet waar in het bovenstaande model van Σ en kan dus ook niet gelden $\Sigma \vDash \alpha$. Maar $\Sigma \vDash \alpha$ of $\Sigma \nvDash \alpha$, dus het laatste geldt.

3. Deze opgave construeert een analogon in eerste-orde logica van de ruimte $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \Sigma)$ uit de propositielogica. Stel je hebt een eerste-orde taal L en een consistente theorie Σ over L. Met een model M van Σ associeren we de deelverzameling $\Sigma(M) = \{\varphi \mid M \vDash \varphi\}$ van de verzameling van alle uitspraken φ over L.

(a) Laat zien dat $\Sigma(M)$ de theorie Σ bevat en *consistent* is (i.e. $\Sigma(M) \nvdash \bot$).

Eerste vraag: dit is de definitie van een model. Tweede: stel dat $\Sigma(M) \vdash \bot$, dan ook $\Sigma(M) \vdash \varphi$ voor alle uitspraken φ (zie regel 4 voor ND in Propositielogica, die ook geldt in eerste-orde logica). Gezondheid geeft $\Sigma(M) \vDash \varphi$. Neem nu een φ zodat $M \vDash \neg\varphi$ (deze bestaat, omdat voor alle φ geldt: ofwel $M \vDash \varphi$ ofwel $M \vDash \neg\varphi$, zie (1.29) is syllabus Predikaatlogica). Dit geeft $\neg\varphi \in \Sigma(M)$ en dus $\Sigma(M) \vDash \neg\varphi$ i.e. $\Sigma(M) \nvDash \varphi$, tegenspraak met $\Sigma(M) \vDash \varphi$.

(b) Laat zien dat $\Sigma(M)$ *maximaal* is (i.e. $\psi \in \Sigma(M)$ of $\neg\psi \in \Sigma(M)$).

Zelfde argument: $\psi \in \Sigma(M)$ desda $M \vDash \psi$ en $\neg\psi \in \Sigma(M)$ desda $M \vDash \neg\psi$ i.e. $M \nvDash \psi$. Triviaal geldt: $M \vDash \psi$ of $M \nvDash \psi$.

(c) Toon aan dat iedere maximale consistente uitbreiding Σ' van Σ van de vorm $\Sigma' = \Sigma(M)$ is, voor een zeker model M van Σ.

Σ' is consistent en heeft dus een model M (Volledigheidsstelling), dat uiteraard ook een model van Σ is (immers $\Sigma \subset \Sigma'$). Als $\sigma \in \Sigma'$ dan $\Sigma' \vdash \sigma$ (triviaal) en dus $M \vDash \sigma$ (gezondheid) en dus $\sigma \in \Sigma$. Dus $\Sigma' \subset \Sigma(M)$. Omgekeerd: als $\varphi \in \Sigma(M)$ maar $\varphi \notin \Sigma'$, dan is $\Sigma' \cup \{\varphi\}$ consistent (het heeft nl. $\Sigma(M)$ als model). Maar Σ' was maximaal consistent. Tegenspraak: $\Rightarrow \varphi \in \Sigma'$.

(d) Definieer de verzameling $X = \{\Sigma(M) \mid M \text{ is een model van } \Sigma\}$; dit is een deelverzameling van de machtsverzameling van $U(L)$. Voor iedere uitspraak $\varphi \in U(L)$ definiëren we nu een deelverzameling

$$U_\varphi = \{\Sigma(M) \mid M \text{ is een model van } \Sigma, \varphi \in \Sigma(M)\}.$$

Bewijs dat:[1]

$$U_\varphi \cap U_\psi = U_{\varphi \wedge \psi}; \tag{1.1}$$

$$U_\varphi \sqcup U_{\neg\varphi} = X, \tag{1.2}$$

waarbij $\sqcup$ de disjuncte vereniging is.

(1.1) volgt uit (1.31) syllabus Predikaatlogica: we hebben $\Sigma(M) \in U_\varphi \cap U_\psi$ desda $M \vDash \varphi$ en $M \vDash \psi$ en dat is volgens (1.31) zo desda $M \vDash (\varphi \wedge \psi)$ hetgeen weer zo is desda $\Sigma(M) \in U_{\varphi \wedge \psi}$. Vgl. (1.2) geldt omdat iedere $\Sigma(M)$ maximaal is en dus ofwel φ ofwel $\neg\varphi$ bevat.

1. Toelichting: dankzij (1.1) vormen willekeurige verenigingen van de deelverzamelingen U_φ, waarbij ψ alle uitspraken over L doorloopt, een topologie op X. Eigenschap (1.2) maakt iedere U_φ clopen, zodat deze topologie totaal onsamenhangend is (net als in de propositielogica). De aldus gedefinieerde topologische ruimte blijkt compact te zijn (en dit feit is equivalent met de compactheidsstelling uit de eerste-orde logica), maar dit is met weinig ervaring in de topologie lastig te bewijzen.

4. Axioma **ZF9** luidt: $\forall_{v \neq \emptyset} \exists_{z \in v} \forall_y (y \in z \to y \notin v)$, oftewel $\forall_{v \neq \emptyset} \exists_{z \in v} (z \cap v = \emptyset)$.
Het principe van $\in$-*inductie* luidt (voor iedere formule φ met $FV(\varphi) = \{x\}$):

$$(\forall_x (\forall_{y \in x} (\varphi[y/x] \to \varphi(x)))) \to \forall_x \varphi(x).$$

Bewijs dat (onder aanname van axioma's **ZF1** t/m **ZF8**) dat axioma **ZF9** equivalent is met $\in$-inductie. Het bewijs hoeft niet formeel (i.e. in ND o.i.d.) te worden opgeschreven. Het kan bijvoorbeeld op de volgende manier worden opgezet:

(a) Van **ZF9** naar $\in$-inductie: neem **ZF9** en $(\forall_x (\forall_{y \in x} (\varphi[y/x] \to \varphi(x))))$ aan en bewijs dat $\neg\forall_x \varphi(x) \equiv \exists_x \neg\varphi(x)$ tot een tegenspraak leidt. Neem hiertoe $\neg\varphi(x)$ aan en definieer $v = \{y \in \mathrm{trcl}(x) \mid \neg\varphi[y/x]\}$ (waarbij $\mathrm{trcl}(x)$ de transitive closure van x is). Dan is $x \in v$, want $x \in \mathrm{trcl}(x)$ en $\neg\varphi(x)$ was aangenomen. Dus $v \neq \emptyset$. Volgens **ZF9** bestaat een $z \in v$ met $z \cap v = \emptyset$. Voor alle $w \in z$ geldt $w \in \mathrm{trcl}(x)$, want $w \in z \in \mathrm{trcl}(x)$ en $\mathrm{trcl}(x)$ is per definitie transitief. Maar $w \notin v$ want $z \cap v = \emptyset$, zodat niet-$\neg\varphi[w/x]$ en dus $\varphi[w/x]$. We hebben dus $\forall_{w \in z} \varphi[w/x]$ en $\neg\varphi[z/x]$. De aanname was echter $\forall_x (\forall_{y \in x} (\varphi[y/x] \to \varphi(x)))$. Neem daarin $x \rightsquigarrow z$ (formeel via $\forall$-Eliminatie met $t \rightsquigarrow z$) en we hebben een tegenspraak. Dus $\neg\forall_x \varphi(x)$ is onjuist en daarom geldt $\forall_x \varphi(x)$. Gegeven de zojuist genoemde aanname is $\in$-inductie dus bewezen.

(b) Omgekeerd: pas $\in$-inductie toe op $\varphi(x) \equiv \forall_v ((x \in v) \to \exists_{z \in v} (z \cap v = \emptyset))$. Neem aan $\forall_{y \in x} \varphi[y/x]$. Kies $x \in v$. Als $x \cap v = \emptyset$ is $\exists_{z \in v} (z \cap v = \emptyset)$ bewezen, namelijk met $z = x$. Als $x \cap v \neq \emptyset$, bestaat $y \in x \cap v$, zodat $y \in v$. De aanname $\varphi[y/x]$ geeft dan $\exists_{z \in v} (z \cap v = \emptyset)$, zodat opnieuw $\varphi(x)$ geldt. Dit bewijst de implicatie $\forall_x (\forall_{y \in x} (\varphi[y/x] \to \varphi(x)))$ die nodig is om via $\in$-inductie te concluderen dat $\forall_x \varphi(x)$.
In $\forall_x \varphi(x)$ draaien we $\forall_x \forall_v$ om tot $\forall_v \forall_x$. Via $\forall$-Eliminatie en $\exists$-Introductie volgt dan uit $\forall_x \varphi(x)$ dat $\forall_v (\exists_x (x \in v) \to \exists_{z \in v} (z \cap v = \emptyset))$. Dit is hetzelfde als $\forall_v (v \neq \emptyset \to \exists_{z \in v} (z \cap v = \emptyset))$ is dat is weer precies **ZF9**.