Tentamen Logica (6 ec), 20 juni 2017, 12:30–15:30

1. Een *ideaal* in een tralie L is een niet-lege deelverzameling $I \subset L$ zodat $I \neq L$ en:
   (a) als $x, y \in I$ dan $x \vee y \in I$;
   (b) als $x \in L$, $y \in I$, en $x \leq y$, dan $x \in I$.
   Een ideaal I is *maximaal* als $I \subset J$ voor een ideaal J impliceert $I = J$.

   Bewijs met het Lemma van Zorn dat ieder ideaal in een tralie met maximaal element bevat is in een maximaal ideaal. ***2 punten***

2. Deze opgave gaat over een nog eenvoudigere logische theorie dan propositielogica. Er zijn drie logische symbolen, namelijk $\prec$, $\not\prec$ en $\perp$ (en verder niets!). Stel S is een verzameling symbolen (zoals in propositielogica). Dan zijn alle uitspraken α over S van de volgende vorm: $p \prec q$, of $p \not\prec q$ (waarbij $p, q \in S$), of $\perp$.
   Formele bewijzen gebruiken de volgende regels à la Natuurlijke Deductie:

$$\text{I. } \frac{\alpha}{\alpha} \qquad \text{II. } \frac{p \prec q \qquad q \prec r}{p \prec r} \qquad \text{III. } \frac{p \prec p}{\perp} \qquad \text{IV. } \frac{\alpha \qquad \neg\alpha}{\perp} \qquad \text{V. } \frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \cdots \\ \cdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg\alpha}$$

   In IV en V is $\neg(p \prec q)$ een afkorting voor $(p \not\prec q)$ en analoog $\neg(p \not\prec q) \equiv (p \prec q)$.
   Zoals gebruikelijk schrijven we $\Sigma \vdash \alpha$ als α kan worden afgeleid uit een bepaalde verzameling uitspraken Σ. De *semantiek* van deze logica is als volgt:

   - een *interpretatie* is een partiële ordening $\leq$ op S, waarbij we zoals wel vaker noteren $p < q$ desda $p \leq q$ en $p \neq q$.
   - we definiëren het symbool $\models$ door middel van de volgende regels:

     $\leq \models (p \prec q)$ desda $p < q$;

     $\leq \models (p \not\prec q)$ desda $p \not< q$;

     $\leq \not\models \perp$.
   - een interpretatie $\leq$ heet een *model* van Σ als $\leq \models \sigma$ voor alle $\sigma \in \Sigma$;
   - we noteren $\Sigma \models \alpha$ als $\leq \models \alpha$ geldt in alle modellen $\leq$ van Σ.

   (a) Bewijs netjes uit de deductieregels dat $\{p \prec q, r \not\prec q\} \vdash r \not\prec p$. ***1 punt***
   (b) Bewijs de *gezondheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \models \alpha$ via inductie op de lengte van een bewijs van α. In dit bewijs mag je aannemen dat Σ een model heeft, omdat de gevraagde implicatie altijd waar is als dit niet zo is. ***1.5 punt***
   (c) Bewijs ook de *volledigheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \models \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$. In dit bewijs mag je aannemen dat Σ consistent is. Een mogelijke aanpak is: ***1.5 punt***
      i. Definieer een relatie $\leq$ op S door $p < q$ desda $\Sigma \vdash (p \prec q)$ en laat zien dat dit een partiële ordening is (mits Σ consistent is).
      ii. Laat zien dat deze interpretatie een model van Σ is.
      iii. Bewijs nu de contrapositief van volledigheid, i.e. $\Sigma \nvdash \alpha \Rightarrow \Sigma \not\models \alpha$.

3. Deze opgave construeert een analogon in eerste-orde logica van de ruimte $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \Sigma)$ uit de propositielogica. Stel je hebt een eerste-orde taal L en een consistente theorie Σ over L. Met een model M van Σ associeren we de deelverzameling $\Sigma(M) = \{\varphi \mid M \vDash \varphi\}$ van de verzameling $U(L)$ van alle uitspraken φ over L.

   (a) Laat zien dat $\Sigma(M)$ de theorie Σ bevat en *consistent* is (i.e. $\Sigma(M) \nvdash \bot$). ***1 punt***

   (b) Laat zien dat $\Sigma(M)$ *maximaal* is (i.e. $\psi \in \Sigma(M)$ of $\neg\psi \in \Sigma(M)$). ***1 punt***

   (c) Toon aan dat iedere maximale consistente uitbreiding Σ' van Σ van de vorm $\Sigma' = \Sigma(M)$ is, voor een zeker model M van Σ. ***1 punt***

   (d) Definieer de verzameling $X = \{\Sigma(M) \mid M \text{ is een model van } \Sigma\}$; dit is een deelverzameling van de machtsverzameling van $U(L)$. Voor iedere uitspraak $\varphi \in U(L)$ definiëren we nu een deelverzameling ***1 punt***

$$U_\varphi = \{\Sigma(M) \mid M \text{ is een model van } \Sigma, \varphi \in \Sigma(M)\}.$$

   Bewijs dat:[1]

$$U_\varphi \cap U_\psi = U_{\varphi\wedge\psi}; \tag{1.1}$$
$$U_\varphi \sqcup U_{\neg\varphi} = X, \tag{1.2}$$

   waarbij $\sqcup$ de disjuncte vereniging is.

4. Axioma **ZF9** luidt: $\forall_{v\neq\emptyset}\,\exists_{z\in v}\,\forall_y(y \in z \to y \notin v)$, oftewel $\forall_{v\neq\emptyset}\,\exists_{z\in v}\,(z \cap v = \emptyset)$. Het principe van $\in$-*inductie* luidt (voor iedere formule φ met $FV(\varphi) = \{x\}$):

$$\forall_x((\forall_{y\in x}\varphi[y/x]) \to \varphi(x)) \to \forall_x\varphi(x).$$

   Bewijs dat (onder aanname van axioma's **ZF1** t/m **ZF8**) dat axioma **ZF9** equivalent is met $\in$-inductie. Het bewijs hoeft niet formeel (i.e. in ND o.i.d.) te worden opgeschreven. Het kan bijvoorbeeld op de volgende manier worden opgezet:

   (a) Van **ZF9** naar $\in$-inductie: neem **ZF9** en $\forall_x((\forall_{y\in x}\varphi[y/x]) \to \varphi(x))$ aan en bewijs dat $\neg\forall_x\varphi(x) \equiv \exists_x\neg\varphi(x)$ tot een tegenspraak leidt. Neem hiertoe $\neg\varphi(x)$ aan en definieer $v = \{y \in \mathrm{trcl}(x) \mid \neg\varphi[y/x]\}$ (waarbij $\mathrm{trcl}(x)$ de transitive closure van x is). Laat zien dat $v \neq \emptyset$. Kies een $z \in v$ volgens **ZF9** en leid een tegenspraak af met de aanname $\forall_x(\forall_{y\in x}(\varphi[y/x] \to \varphi(x)))$, namelijk voor $x = z$ (formeel via $\forall$-Eliminatie op de variabele x in $\forall_x$ met $t \rightsquigarrow z$). ***1 bonuspunt***

   (b) Omgekeerd: toon aan dat **ZF9** volgt uit $\forall_x\varphi(x)$ met ***1 bonuspunt***

$$\varphi(x) \equiv \forall_v((x \in v) \to \exists_{z\in v}(z \cap v = \emptyset))$$

   en pas $\in$-inductie toe om $\forall_x\varphi(x)$ te bewijzen.

LOGICA IS LEUK!

1. Toelichting: dankzij (1.1) vormen willekeurige verenigingen van de deelverzamelingen U_φ, waarbij ψ alle uitspraken over L doorloopt, een topologie op X. Eigenschap (1.2) maakt iedere U_φ clopen, zodat deze topologie totaal onsamenhangend is (net als in de propositielogica). De aldus gedefinieerde topologische ruimte blijkt compact te zijn (en dit feit is equivalent met de compactheidsstelling uit de eerste-orde logica), maar dit is met weinig ervaring in de topologie lastig te bewijzen.