Uitwerking Tentamen Logica 1 (3 ec), 20 juni 2017

1. Een *ideaal* in een tralie L is een niet-lege deelverzameling $I \subset L$ zodat $I \neq L$ en:
   (a) als $x, y \in I$ dan $x \vee y \in I$;
   (b) als $x \in L$, $y \in I$, en $x \leq y$, dan $x \in I$.
   Een ideaal I is *maximaal* als $I \subset J$ voor een ideaal J impliceert $I = J$.

   Bewijs met het Lemma van Zorn dat ieder ideaal in een tralie met maximaal element bevat is in een maximaal ideaal.

   Definieer de poset $(P, \leq)$ van alle idealen in L die het gegeven ideaal I bevatten, met $\subset$ als $\leq$. Ga de condities voor toepassing van het Lemma van Zorn na:
   - P is niet leeg want I zit erin.
   - Als een keten $\{I_i\}$ in P zit dan zit $\cup_i I_i$ ook in P (en dit is dan een maximaal element van de keten):
     (a) Als $x, y \in \cup_i I_i$, dan zijn er i en j met $x \in I_i$ en $y \in I_j$, omdat het een keten is geldt $I_i \subset I_j$ of omgekeerd, stel het eerste, dan $x, y \in I_j$ en dus $x \vee y \in I_j \subset \cup_i I_i$, dus $x \vee y \in \cup_i I_i$.
     (b) Als $x \in L$, $y \in \cup_i I_i$, en $x \leq y$, dan $y \in I_j$ voor zekere j, dus $x \in I_j \subset \cup_i I_i$, dus $x \in \cup_i I_i$.
     (c) De conditie $I \neq L$ is equivalent met $1 \notin I$ (waarbij 1 het maximale element is van L). Omdat $1 \notin I_i$ geldt ook $1 \notin \cup_i I_i$, zodat $\cup_i I_i \notin L$ (deze stap in het bewijs is niet waar als L geen maximaal element heeft, dan kan het wel degelijk zo zijn dat $I_i \notin L$ voor alle i terwijl $\cup_i I_i = L$, neem bijvoorbeeld $L = \mathbb{N}$ met $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$).

   Het Lemma van Zorn geeft P een maximaal element I_m. Stel ten slotte dat $I_m \subset J$, voor een ideaal J. Dan bevat J ook I (want $I \subset I_m \subset J$) en dus $J \in P$. Als $I_m \neq J$, dan was I_m geen maximaal element van P, tegenspraak. Dus $J = I_m$.

2. Deze opgave gaat over een nog eenvoudigere logische theorie dan propositielogica. Er zijn drie logische symbolen, namelijk $\prec$, $\not\prec$ en $\perp$ (en verder niets!). Stel S is een verzameling symbolen (zoals in propositielogica). Dan zijn alle uitspraken α over S van de volgende vorm: $p \prec q$, of $p \not\prec q$ (waarbij $p, q \in S$), of $\perp$.
   Formele bewijzen gebruiken de volgende regels à la Natuurlijke Deductie:

$$\text{I. } \frac{\alpha}{\alpha} \qquad \text{II. } \frac{p \prec q \qquad q \prec r}{p \prec r} \qquad \text{III. } \frac{p \prec p}{\perp} \qquad \text{IV. } \frac{\alpha \qquad \neg\alpha}{\perp} \qquad \text{V. } \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \cdots\\ \cdots\\ \perp\end{array}}{\neg\alpha}$$

   In IV en V is $\neg(p \prec q)$ een afkorting voor $(p \not\prec q)$ en analoog $\neg(p \not\prec q) \equiv (p \prec q)$. Zoals gebruikelijk schrijven we $\Sigma \vdash \alpha$ als α kan worden afgeleid uit een bepaalde verzameling uitspraken Σ. De *semantiek* van deze logica is als volgt:
   - een *interpretatie* is een partiële ordening $\leq$ op S, waarbij we zoals wel vaker noteren $p < q$ desda $p \leq q$ en $p \neq q$.
   - we zeggen dat $\leq \vDash (p \prec q)$ desda $p < q$, $\leq \vDash (p \not\prec q)$ desda $p \not< q$, en $\leq \not\vDash \perp$.
   - een interpretatie $\leq$ heet een *model* van Σ als $\leq \vDash \sigma$ voor alle $\sigma \in \Sigma$;
   - we noteren $\Sigma \vDash \alpha$ als α waar is in alle modellen van Σ.

(a) Bewijs netjes via uit de deductieregels dat $\{p \prec q, r \not\prec q\} \vdash r \not\prec p$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \prec q \quad r \not\prec q \quad [r \prec p]}{r \prec q}}{\perp}}{r \not\prec p}$$

Achtereenvolgens gebruikt: regels II, IV, V.

(b) Bewijs de *gezondheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \vDash \alpha$.

Als het bewijs van $\Sigma \vdash \alpha$ uit $n = 1$ stap bestaat, dan is $\alpha \in \Sigma$ en geldt $\Sigma \vDash \alpha$ per definitie van $\vDash$ en van een model: $\Sigma \vDash \alpha$ betekent immers dat α waar is in alle modellen $\leq$ van Σ, maar $\leq$ is precies een model van Σ als α waar is voor alle $\alpha \in \Sigma$. Stel nu dat de claim voor een bewijs van n regels klopt, de stap naar $n + 1$ gaat via een van de regels I - V.

- Regel I is triviaal.
- Regel II: uit $\Sigma \vDash (p \prec q)$ en $\Sigma \vDash (q \prec r)$ volgt dat voor iedere part. ordening $\leq$ geldt $p \leq q$ en $q \leq r$, dus $p \leq r$ uit transitiviteit van $\leq$, dus $\Sigma \vDash (p \prec r)$.
- Regel III: $\Sigma(p \prec p)$ betekent dat voor iedere part. ordening $\leq$ geldt $p < p$, dit is nooit waar, de conclusie $\leq \vDash \perp$ is ook niet waar, zodat de implicatie $\Sigma(p \prec p) \Rightarrow \leq \vDash \perp$ waar is.
- Regel IV: analoog.
- Regel V: voor het bewijs van $\perp$ uit $\Sigma \cup \{\alpha\}$, i.e. $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \perp$, geldt de inductiehypothese, zodat $\Sigma \cup \{\alpha\} \vDash \perp$. Dit is volgens de interpretatieregel voor $\perp$ een tegenspraak, zodat $\Sigma \cup \{\alpha\}$ geen model $\leq$ heeft. Neem een model $\leq$ voor Σ, dan geldt $\leq \vDash \alpha$ ofwel $\leq \vDash \neg\alpha$. In het eerste geval is $\leq$ een model van $\Sigma \cup \{\alpha\}$, zodat geldt $\leq \vDash \neg\alpha$. Dit argument geldt voor ieder model $\leq$, zodat $\Sigma \vDash \neg\alpha$.

(c) Bewijs ook de *volledigheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vDash \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$.

i. Definieer een relatie $\leq$ op S door $p < q$ desda $\Sigma \vdash (p \prec q)$ en laat zien dat dit een partiële ordening is (mits Σ consistent is).

Da axioma's op $<$ zijn transitiviteit en $p \not< p$. De eerste volgt direct uit deductieregel II. De tweede houdt in dat $\Sigma \vdash (p \prec p)$ niet waar is; stel wel, dan volgt uit regel III dat $\Sigma \vdash \perp$, maar Σ is consistent. Dus $\Sigma \vdash (p \prec p)$ en dus $p \not< p$.

ii. Laat zien dat deze interpretatie een model van Σ is.

Als $\sigma \in \Sigma$ van de vorm $\sigma \equiv p \prec q$ is, dan geldt uiteraard $\Sigma \vdash p \prec q$ en dus $p < q$ i.e. $\leq \vDash \sigma$. Als $\sigma \in \Sigma$ van de vorm $\sigma \equiv p \not\prec q$ is, dan geldt evenzo $\Sigma \vdash (p \not\prec q)$, maar we moeten bewijzen dat $\Sigma \nvdash (p \prec q)$, wat niet hetzelfde is. Stel echter $\Sigma \vdash (p \prec q)$, dan volgt uit $\Sigma \vdash (p \not\prec q)$ en regel IV dat $\Sigma \vdash \perp$, maar Σ is consistent, zodat uit het ongerijmde volgt $\Sigma \nvdash (p \prec q)$, oftewel $p \not< q$. Dus in alle gevallen volgt: $\sigma \in \Sigma \Rightarrow \leq \vDash \sigma$.

iii. Bewijs nu de contrapositief van volledigheid, i.e. $\Sigma \nvdash \alpha \Rightarrow \Sigma \nvDash \alpha$.

Stel $\Sigma \nvdash \alpha$, dan is α niet waar in het bovenstaande model van Σ en kan dus ook niet gelden $\Sigma \vDash \alpha$. Maar $\Sigma \vDash \alpha$ of $\Sigma \nvDash \alpha$, dus het laatste geldt.

3. Deze opgave gebruikt de notatie van de syllabus *Propositielogica*.

(a) Bewijs dat voor iedere verzameling uitspraken $\Gamma \subset BT(S)$ geldt: $\Gamma \models \bot$ desda er voor iedere $V \in \mathrm{Val}(BT(S))$ een $\gamma \in \Gamma$ is zodat $V(\gamma) = 0$.

$\Gamma \models \alpha$ betekent symbolisch: $\forall_{V \in \mathrm{Val}(BT(S))}((\forall_{\gamma\in\Gamma} V(\gamma) = 1) \to V(\alpha) = 1)$. Met $\alpha \equiv \bot$ geeft dit de implicatie $(\forall_{\gamma\in\Gamma} V(\gamma) = 1) \to V(\bot) = 1)$, maar omdat $V(\bot) = 0$ voor alle V, kan dit alleen waar zijn desda het antecedent $\forall_{\gamma\in\Gamma} V(\gamma) = 1$ onjuist is en dit is zo desda $\exists_{\gamma\in\Gamma} V(\gamma) = 0$.
Ook een bewijs uit het ongerijmde lukt: als er een V is zodat $V(\gamma) = 1$ voor alle $\gamma \in \Gamma$ dan heeft Γ dus een model en is daarmee consistent (Volledigheidsstelling, zie Stelling 1.5). Dan geldt $\Gamma \nvdash \bot$ en dus ook $\Gamma \nvDash \bot$ (aangezien $\Gamma \vdash \bot$ desda $\Gamma \models \bot$, zie Stelling 1.3).

(b) Leid hieruit af dat als er voor iedere $V \in \mathrm{Val}(BT(S))$ een $\gamma \in \Gamma$ is zodat $V(\gamma) = 0$, er een *eindige* deelverzameling $\Gamma' \subset \Gamma$ is met dezelfde eigenschap (i.e.: voor iedere $V \in \mathrm{Val}(BT(S))$ is er een $\gamma \in \Gamma'$ zodat $V(\gamma) = 0$).

We hebben $\Gamma \models \bot$ desda $\Gamma \vdash \bot$ desda (Stelling 1.3). Bewijs van $\bot$ uit Γ heeft eindig veel stappen en kan dus slechts een eindig deel Γ' van Γ gebruiken (zie bewijs Compactheidsstelling = Gevolg 1.1) Claim volgt dan uit vorige deel opgave.

(c) Leid hieruit af dat de ruimte $X = \mathrm{Val}(BT(S))$ compact is in de topologie waarin de open verzamelingen willekeurige verenigingen zijn van (open) deelverzamelingen van de vorm U_α, met $\alpha \in BT(S)$, waarbij

$$U_\alpha = \{V \in \mathrm{Val}(BT(S)) \mid V(\alpha) = 1\}.$$

Merk op dat $V \in U_{\neg\alpha}$ desda $V(\alpha) = 0$ (want $V(\alpha) = 1$ desda $V(\neg\alpha) = 0$). We hebben $X = \cup_{\gamma\in\Gamma} U_{\neg\gamma}$ desda iedere $V \in X$ in een of andere $U_{\neg\gamma}$ ligt en dit is dus zo desda er een $\gamma \in \Gamma$ is met $V(\gamma) = 0$ en dat is volgens (b) al zo voor een *eindige* deelverzameling $\Gamma' \subset \Gamma$, i.e. als $X = \cup_{\gamma\in\Gamma} U_{\neg\gamma}$ dan is er een *eindige* deelverzameling $\Gamma' \subset \Gamma$ zodat $X = \cup_{\gamma\in\Gamma'} U_{\neg\gamma}$. Als we switchen van Γ naar $\neg\Gamma = \{\alpha \mid \neg\alpha \in \Gamma\}$, zodat $X = \cup_{\neg\gamma\in\neg\Gamma} U_{\neg\gamma}$ oftewel $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ met $A = \neg\Gamma$, dan volgt dat er een eindige deelverzameling $A' \subset A$ is zodat $X = \cup_{\alpha\in A'} U_\alpha$. Een overdekking van X is van de vorm $\{U_i\}_{i\in I}$ met $X = \cup_{i\in I} U_i$, waarbij iedere $U_i = \cup_{\alpha\in A_i} U_\alpha$ voor een deelverzameling A_i van de verzameling van alle uitspraken α. Neem $A = \cup_i A_i$ en A' als boven, dan is er dus ook een eindige deelverzameling $I' \subset I$ zodat $X = \cup_{i\in I'} U_i$ (neem voor iedere $\alpha \in A'$ een $i \in I$ zodat $\alpha \in A_i$). Daarmee heeft iedere open overdekking van X een eindige deeloverdekking en is X dus compact (zeer uitgebreid antwoord).

(d) Het voorgaande resultaat geeft compactheid van $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \emptyset) = \mathrm{Val}(BT(S))$. Laat zien dat dit compactheid impliceert van de ruimte $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \Sigma)$ (uit week 7), voor een willekeurige theorie $\Sigma \subset BT(S)$.

We hebben per definitie van een model van Σ:

$$\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \Sigma) = \{V \in X \mid \forall_{\sigma\in\Sigma} V(\sigma) = 1\} = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma.$$

De open verzamelingen U_α zijn tevens gesloten (vermeld op tentamen) en dus is $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \Sigma)$ als intersectie van gesloten deelverzamelingen gesloten in X, en daarmee compact (laatste stap ook vermeld op tentamen).