Tentamen Logica 1 (3 ec), 20 juni 2017, 12:30–15:30

1. Een *ideaal* in een tralie L is een niet-lege deelverzameling $I \subset L$ zodat $I \neq L$ en:
   (a) als $x, y \in I$ dan $x \vee y \in I$;
   (b) als $x \in L$, $y \in I$, en $x \leq y$, dan $x \in I$.
   Een ideaal I is *maximaal* als $I \subset J$ voor een ideaal J impliceert $I = J$.

   Bewijs met het Lemma van Zorn dat ieder ideaal in een tralie met maximaal element bevat is in een maximaal ideaal. ***2 punten***

2. Deze opgave gaat over een nog eenvoudigere logische theorie dan propositielogica. Er zijn drie logische symbolen, namelijk $\prec$, $\not\prec$ en $\perp$ (en verder niets!). Stel S is een verzameling symbolen (zoals in propositielogica). Dan zijn alle uitspraken α over S van de volgende vorm: $p \prec q$, of $p \not\prec q$ (waarbij $p, q \in S$), of $\perp$.
   Formele bewijzen gebruiken de volgende regels à la Natuurlijke Deductie:

$$\text{I. } \frac{\alpha}{\alpha} \qquad \text{II. } \frac{p \prec q \qquad q \prec r}{p \prec r} \qquad \text{III. } \frac{p \prec p}{\perp} \qquad \text{IV. } \frac{\alpha \qquad \neg\alpha}{\perp} \qquad \text{V. } \frac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \cdots \\ \cdots \\ \perp\end{array}}{\neg\alpha}$$

   In IV en V is $\neg(p \prec q)$ een afkorting voor $(p \not\prec q)$ en analoog $\neg(p \not\prec q) \equiv (p \prec q)$.
   Zoals gebruikelijk schrijven we $\Sigma \vdash \alpha$ als α kan worden afgeleid uit een bepaalde verzameling uitspraken Σ. De *semantiek* van deze logica is als volgt:

   - In plaats van valuaties op S hebben we nu *partiële ordeningen* $\leq$ op S, waarbij we zoals wel vaker noteren $p < q$ desda $p \leq q$ en $p \neq q$.
   - we definiëren het symbool $\vDash$ door middel van de volgende regels:

     $\leq \vDash (p \prec q)$ desda $p < q$;

     $\leq \vDash (p \not\prec q)$ desda $p \not< q$;

     $\leq \nvDash \perp$.
   - een interpretatie $\leq$ heet een *model* van Σ als $\leq \vDash \sigma$ voor alle $\sigma \in \Sigma$;
   - we noteren $\Sigma \vDash \alpha$ als $\leq \vDash \alpha$ geldt in alle modellen $\leq$ van Σ.

   (a) Bewijs netjes via ND dat $\{p \prec q, r \not\prec q\} \vdash r \not\prec p$. ***1 punt***
   (b) Bewijs de *gezondheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \vDash \alpha$ via inductie op de lengte van een bewijs van α. In dit bewijs mag je aannemen dat Σ een model heeft, omdat de gevraagde implicatie altijd waar is als dit niet zo is. ***1.5 punt***
   (c) Bewijs ook de *volledigheid* van deze theorie, i.e. $\Sigma \vDash \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$. In dit bewijs mag je aannemen dat Σ consistent is. Een mogelijke aanpak is: ***1.5 punt***
      i. Definieer een relatie $\leq$ op S door $p < q$ desda $\Sigma \vdash (p \prec q)$ en laat zien dat dit een partiële ordening is (mits Σ consistent is).
      ii. Laat zien dat deze interpretatie een model van Σ is.
      iii. Bewijs nu de contrapositief van volledigheid, i.e. $\Sigma \nvdash \alpha \Rightarrow \Sigma \nvDash \alpha$.

3. Deze opgave gebruikt de notatie van de syllabus *Propositielogica*.

(a) Bewijs dat voor iedere verzameling uitspraken $\Gamma \subset BT(S)$ geldt: $\Gamma \models \bot$ desda er voor iedere $V \in \mathrm{Val}(BT(S))$ een $\gamma \in \Gamma$ is zodat $V(\gamma) = 0$. ***1 punt***

(b) Leid hieruit af dat als er voor iedere $V \in \mathrm{Val}(BT(S))$ een $\gamma \in \Gamma$ is zodat $V(\gamma) = 0$, er een *eindige* deelverzameling $\Gamma' \subset \Gamma$ is met dezelfde eigenschap (i.e.: voor iedere $V \in \mathrm{Val}(BT(S))$ is er een $\gamma \in \Gamma'$ zodat $V(\gamma) = 0$). ***1 punt***

(c) Leid hieruit af dat de ruimte $\mathrm{Val}(BT(S))$ compact is in de topologie waarin de open verzamelingen willekeurige verenigingen zijn van (open) deelverzamelingen van de vorm U_α, met $\alpha \in BT(S)$, waarbij ***1 punt***

$$U_\alpha = \{V \in \mathrm{Val}(BT(S)) \mid V(\alpha) = 1\}.$$

(d) Het voorgaande resultaat geeft compactheid van $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \emptyset) = \mathrm{Val}(BT(S))$. Laat zien dat dit compactheid impliceert van de ruimte $\mathrm{Mod}_{\underline{2}}(S, \Sigma)$ (uit week 7), voor een willekeurige theorie $\Sigma \subset BT(S)$. ***1 punt***

N.B. Een ruimte X heet compact als iedere open overdekking $\{U_i\}_{i \in I}$ van X (i.e. $X = \cup_{i \in I} U_i$) een eindige deeloverdekking heeft, d.w.z. er is een eindige $F \subset I$ zodat $X = \cup_{i \in F} U_i$. Verder brengen we in herinnering dat een gesloten deelruimte van een compacte ruimte compact is, dat de open verzamelingen U_α tevens gesloten zijn (zie syllabus week 7) en dat de intersectie van een willekeurige familie van gesloten verzamelingen wederom gesloten is.

LOGICA IS LEUK!