Uitwerkingen Proeftentamen Lineaire Algebra A 19 januari 2018

Hierbij korte beschrijvingen van de manier waarop de opgaven beantwoord zouden kunnen worden. Vaak zijn er ook anderemanieren en voor maximale punten is soms wat meer toelichting nodig (als ik hieronder 'uitschrijven' zet, bedoel ik dat je dat voor een perfecte oplossing zelf inderdaad moet doen en niet dat je dit zo zelf in jouw oplossing zet!). De uitkomst alleen is meestal niet het belangrijkst: als je goed aangeeft hoe je tot het antwoord komt is dat vaak wel behoorlijk goed.

1. Gegeven is de verzameling P van polynomen

$$P = \left\{ ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c : \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

met de gebruikelijke optelling van polynomen en scalaire vermenigvuldiging met reële getallen.

(a) Om te bewijzen dat P zo een $\mathbb{R}$-vectorruimte is, is de standaardmethode om na te gaan dat aan de 8 axioma's VS 1–8 voor vectorruimten (boek p. 7) is voldaan (maar vergeet daarbij vooral niet dat je ook moet laten zien dat de som van 2 elementen en alle scalaire veelvouden van elementen ook weer in de verzameling zitten — zie bovenaan de pagina!). In gevallen zoals hier, waar een deelverzameling is gegeven van een vectorruimte ($\mathsf{P}_4(\mathbb{R})$ hier) is het makkelijker om te laten zien dat aan de drie eisen voor lineaire deelruimte (Stelling 1.3 op p. 17) is voldaan: het is duidelijk dat het nulelement $0 \in \mathsf{P}_4$ in P zit, dat als u, v uit P_4 in P zitten dat ook geldt voor $u+v$ (uitschrijven!) en voor alle $s \cdot u$ voor elke scalar $c \in \mathbb{R}$ (schrijf uit!).
Nog een andere optie zie je in (b).

(b) Omdat $ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c$ gelijk is aan

$$a(x^4 + x^3 + x^2) + b(x^3 + x^2 + x) + c(x^2 + x + 1)$$

is het duidelijk dat P precies het opspansel is van $x^4 + x^3 + x^2$, $x^3 + x^2 + x$, en $x^2 + x + 1$. Dus deze drie spannen P op; om te laten zien dat ze een basis vormen, laat je zien dat ze onafhankelijk zijn.
Stel eens dat $a(x^4 + x^3 + x^2) + b(x^3 + x^2 + x) + c(x^2 + x + 1) = 0$; dan is $c = 0$ (vanwege de constante term), en dan $b = 0$ vanwege de lineaire term en dan $a = 0$ vanwege de hogeregraads termen, dus $a = b = c = 0$. Met andere woorden: ze zijn onafhankelijk. Voor $\mathcal{B}$ kunnen we dus $\{x^4 + x^3 + x^2, x^3 + x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ nemen.

(c) De afbeelding

$$T : ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c \mapsto (a, a+b, a+b+c, b+c, c)$$

van P naar $\mathbb{R}^5$ is lineair (moet je eigenlijk uitschrijven; merk in ieder geval op dat de coordinaten in het beeld lineaire functies van de coordinaten van de originelen zijn) en ook injectief, want: als het beeld nul is, moeten a, b, c wel nul zijn, en dan is het origineel $ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(b+c)x+c = 0$.

(d) De lineaire T van P naar $\mathbb{R}^5$ heeft volgens (c) kern $\{0\}$, en dat heeft dimensie 0. Volgens de Dimensiestelling is de dimensie van de kern plus die van het beeld $R(T)$ gelijk aan de dimensie van P, en die is 3 volgens (b), waar we een basis van 3 elementen vonden. Dus is $\dim R(T) = 3$.

(e) Dit is een (onbedoelde) strikvraag: $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, en die ruimte heeft een *lege* basis! (De nulvector zit nooit in een basis want is op zijn eentje al een afhankelijk stelsel.) Eigenlijk had hier een andere vraag horen te staan ... over het aanvullen van de basis van P tot een basis voor de hele $\mathbb{R}^5$, bijvoorbeeld.

2.

(a) De bewering: 'de afbeelding $D : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{F}_2$ met $D(A) = \det A$ is een lineair afbeelding' is niet waar; dit kun je bijvoorbeeld zien door te laten zien dat er twee matrices $A, B \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$ zijn met $D(A+B) \neq D(A) + D(B)$: neem bijvoorbeeld $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan is de som $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ maar $D(A+B) = 1 \neq 0 = D(A) + D(B)$ in $\mathbb{F}_2$.

(b) De bewering 'Als U, V, W drie lineaire deelruimten zijn van $\mathbb{R}^3$ van dimensie 1 waarvoor $(0,0,0)$ het enige gemeenschappelijke punt is, dan geldt $\mathbb{R}^3 = U \oplus V \oplus W$' is ook niet waar. Neem voor U, V de x-as en y-as resp., en voor W de lijn door $(1,1)$ en de oorsprong (die lijn ligt in het vlak door U en V): dan is $U + V + W = U + V$ het x-y-vlak en niet de hele R^3. Dus is R^3 niet eens de som van U, V, W, laat staan de directe som. (De eis die echt voldoende is, is dat de doorsnede van elk met het opspansel van de andere twee gelijk $\{0\}$ is, en daaraan is hier niet voldaan.)

(c) De bewering 'Als de vectoren u, v uit een reële vectorruimte V lineair afhankelijk zijn, dan is er een $c \in \mathbb{R}$ waarvoor $u = c \cdot v$ of $v = c \cdot u$' is waar: als u en v afhankelijk zijn bestaan er scalairen a en b zodat $au + bv = 0$, met niet $a = b = 0$. Als $a \neq 0$ is dan is $u = (-b/a)v$ en als $b \neq 0$ is, dan is $v = (-a/b)u$. (Goed opletten, want u of v mag de nulvector zijn, en ook allebei!)

(d) De bewering 'Als $u, v \in F^3$ dan $u + v = (0,0,0) \Rightarrow u \neq v$' is niet waar: je kunt natuurlijk gewoon $u = v = (0,0,0)$ nemen, dan is de som $(0,0,0)$ maar $u = -v$. (Er was hier een inderhaast een voorwaarde weggevallen waardoor de opgave wel heel flauw werd; er moest rechts staan $u = (0,0,0)$ of $u \neq -v$.

Dan nog steeds onwaar, maar je moet een niet-nul vector als tegenvoorbeeld nemen: $(1,0,0)+(1,0,0)=(0,0,0)$ als we over $F=\mathbb{F}_2$ werken!)

3.

(a) Het stelsel:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3 &= 1\\ x_1+3x_2-2x_3 &= 1\\ 3x_1-x_2 &= 0 \end{aligned}$$

heeft geen oplossingen, zoals direct uit vegen blijkt: als je de tweede vergelijking 2 keer van de eerste aftrekt, vind je $-5x_2+3x_3=-1$ en als je de tweede 3 maal van de laatste aftrekt krijg je $-10x_2+6x_3=-3$ en die twee hebben geen oplossing. (Het is leuker om rechts in de derde vergelijking de 0 door 1 te vervangen: dan vind je een oplossing $(1,2,3)$ door te vegen, en alle oplossingen zijn van de vorm $(1,2,3)+a\cdot(1,3,5)$.)

(b) Dit is herhaald (maar standaard) veegwerk: vermenigvuldig eerst van links met de elementaire matrix $E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ om de eerste rij 2 keer bij de derdeopte tellen; daarna met een E_2 om de tweede rij 2 keer van de eerste af te trekken en met E_3 om de tweede 6 keer van de derde af te trekken, enz. Je krijgt dan zoiets als (uitschrijven!)

$$E_5\cdot E_4\cdot E_3\cdot E-2\cdot E_1\cdot F=I_3$$

en dan wordt

$$F=E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}\cdot E_4^{-1}\cdot E_5^{-1};$$

nu ben je klaar als je nog aangeeft welke elementaire matrix de inverse is van de E_i; bijvoorbeeld,

$$E_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}.$$

Je mag natuurlij ook met kolomoperaties van rechts werken.

4. Laat $Z_{n+1}=\begin{pmatrix}0&x\\x^{\mathsf{T}}&I_n\end{pmatrix}$ de reële $(n+1)\times(n+1)$ matrix zijn, voor zekere $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ en met I_n de $n\times n$ eenheidsmatrix.

(a) $\det(Z_2)=-x_1^2$.

(b) Z_2 is inverteerbaar dan en slechts dan als de determinant niet nul is, dus, volgens (a), als $x_1 \neq 0$. De inverse is dan

$$Z_2^{-1} = \frac{-1}{x_1^2} \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(gebruik de algemene formule voor de inverse van een 2×2 matrix).

(c) $\det(Z_3) = -x_1^2 - x_2^2$.

(d) Z_3 is inverteerbaar dan en slechts dan als de determinant niet nul is, dus, volgens (c), als niet $x_1 = x_2 = 0$. De inverse is dan

$$Z_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 \\ -x_1 & -x_2^2 & x_1 x_2 \\ -x_2 & x_1 x_2 & -x_1^2 \end{pmatrix}$$

(gebruik de klassieke geadjungeerde bijvoorbeeld!).

(e) $\det(Z_n) = -(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$. Ik zou hier wel genoegen nemen met alleen de formule; het bewijs kan met inductie.