Tentamen [Extra tijd]	**Lineaire Algebra A**	**19 januari 2018**
HAL 2 [HG00.071]		8.30–11.30 [12.00]

Bij elke opgave staat het aantal te behalen punten per onderdeel. Maak elke opgave op een afzonderlijk blad! Lever al deze vellen in en vergeet niet op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam te schrijven; als je dat goed doet krijg je 10 punten kado. In totaal zijn er dan 100 punten te behalen.

1. *Te behalen: 5 punten per onderdeel; totaal 25 punten.*

Gegeven is de verzameling P van polynomen

$$P = \left\{ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c : \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

met de gebruikelijke optelling van polynomen en scalaire vermenigvuldiging met reële getallen.

(a) Bewijs dat P zo een $\mathbb{R}$-vectorruimte is.
(b) Geef een stelsel $\mathcal{B}$ van polynomen dat een basis voor P vormt; toon ook aan dat deze polynomen een basis vormen.
(c) Geef een injectieve lineaire afbeelding T van P naar $\mathbb{R}^5$.
(d) Bepaal de dimensie van het beeld $R(T)$ en van de kern $\operatorname{Ker} T$ van T.
(e) Geef een basis voor $\operatorname{Ker} T$.

2. *Te behalen: 5 punten per onderdeel; totaal 20 punten.*

Bewijs of weerleg (met een expliciet tegenvoorbeeld) deze beweringen.

(a) De afbeelding $D : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{F}_2$ met $D(A) = \det A$ is een lineair afbeelding; hier is $\mathbb{F}_2$ natuurlijk het lichaam met 2 elementen.
(b) Als U, V, W drie lineaire deelruimten zijn van $\mathbb{R}^3$ van dimensie 1 waarvoor $(0, 0, 0)$ het enige gemeenschappelijke punt is, dan geldt $\mathbb{R}^3 = U \oplus V \oplus W$.
(c) Als de vectoren u, v uit een reële vectorruimte V lineair afhankelijk zijn, dan is er een $c \in \mathbb{R}$ waarvoor $u = c \cdot v$ of $v = c \cdot u$.
(d) Als $u, v \in F^3$, voor een lichaam F, dan geldt

$$u + v = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad u \neq -v.$$

3. *Te behalen: 10 punten per onderdeel; totaal 20 punten.*

(a) Bepaal alle oplossingen van het volgende stelsel lineaire vergelijkingen door middel van Gauss-eliminatie (en laat tussenstappen zien):

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Laat zien met welke opeenvolging van elementaire rij-operaties en elementaire kolom-operaties je de matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ kunt 'vegen' tot de 3×3 eenheidsmatrix, en schrijf vervolgens F als product van elementaire matrices.

4. *Te behalen: 5 punten per onderdeel; totaal 25 punten.*

Laat $Z_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^{\mathsf{T}} & I_n \end{pmatrix}$ de reële $(n+1) \times (n+1)$ matrix zijn, voor zekere $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en met I_n de $n \times n$ eenheidsmatrix.

(a) Bereken $\det(Z_2)$ (de determinant van een 2×2 matrix).

(b) Bepaal alle $x_1 \in \mathbb{R}$ waarvoor Z_2 inverteerbaar is, en bepaal ook de inverse Z_2^{-1} in al die gevallen.

(c) Bepaal $\det(Z_3)$.

(d) Bepaal alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ waarvoor Z_3 inverteerbaar is, en bepaal ook de inverse Z_3^{-1} in al die gevallen.

(e) Geef een formule voor $\det(Z_n)$, die geldt voor alle $n \geq 1$.