

Voor de volgende vijf opgaven staat in de kantlijn aangegeven hoeveel punten per onderdeel te behalen zijn. Je krijgt 5 punten kado als op alle vellen je naam staat.

1. Een lineaire transformatie S van $V = \mathbf{R}^3$ wordt gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 5 pt (i) Bereken het karakteristieke polynoom p_A , en alle reële eigenwaarden met hun multipliciteiten.
- 6 pt (ii) Bepaal een basis voor V bestaande uit disjuncte cykels van gegeneraliseerde eigenvectoren voor A . Geef deze basis en de bijbehorende Jordannorm voor A .
Zij B de matrix in Jordan-normvorm

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- van een operator T op een vectorruimte V .
- 4 pt (iii) Geef de definitie van *eigenruimte*, E_λ , en van *gegeneraliseerde eigenruimte* G_λ ; voor welke eigenwaarden λ is de gegeneraliseerde eigenruimte G_λ van B gelijk aan de eigenruimte E_λ ? Verklaar je antwoord.
- 6 pt (iv) Bereken voor elke eigenwaarde λ de volgende gehele getallen voor de operator $U = T - \lambda I$:
(a) $\text{rang}(U)$; (b) $\text{rang}(U^2)$; (c) $\dim \text{Ker}(U)$; (d) $\dim \text{Ker}(U^2)$.

2. De kwadratische vorm K op $V = \mathbf{R}^3$ is gegeven door

$$K\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}\right) = 5t_1^2 + 4t_1t_2 + 5t_2^2 + 2t_1t_3 + 2t_2t_3 + 8t_3^2.$$

- 5 pt (i) Bepaal de matrix behorende bij K , en laat zien dat het karakteristieke polynoom daarvan gelijk is aan $-(x-3)(x-6)(x-9)$; geef ook de bij K behorende bilineaire vorm H .
- 5 pt (ii) Vind een orthonormale basis β voor V zodat de representatiematrix $\psi_\beta(H)$ een diagonaalmatrix D is; geef deze D ook.

3. Laat M de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

zijn.

- 5 pt (i) Bereken M^2 en M^3 rechtstreeks.
- 5 pt (ii) Laat zien dat het karakteristieke polynoom p_M gelijk is aan $-(x^3 - 5)$, formuleer de Stelling van Cayley-Hamilton en laat zien dat hieruit hetzelfde resultaat volgt voor M^3 als in (i).
- 5 pt (iii) Het polynoom $x^3 - 5$ heeft een positief reëel nulpunt dat we gewoonlijk met $\sqrt[3]{5}$ aangeven; van het polynoom $x^3 - 1$ kun je de drie complexe nulpunten exact geven (met 1 worteltrekking). Doe dat laatste en geef met behulp daarvan de drie verschillende complexe nulpunten van $x^3 - 5$ exact aan. Dit alles natuurlijk zonder rekenmachine.
- 5 pt (iv) Beargumenteer dat uit (iii) volgt dat er een inverteerbare complexe matrix Q bestaat zodat

$$(Q^{-1}MQ)^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

hoe volgt hieruit ook de waarde van M^3 uit (i)?

4. Geef in elk van de volgende gevallen een bewijs voor de bewering of toon door middel van een expliciet tegenvoorbeeld de onjuistheid ervan aan.

- 5 pt (i) Voor alle 2×2 matrices A, B over een lichaam F geldt

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

- 5 pt (ii) De matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

uit $M_{2 \times 2}(\mathbf{Q})$ zijn congruent over $\mathbf{Q}$.

- 5 pt (iii) Voor elke eindig-dimensionale vectorruimte V geldt dat er bij elke niet-nul vector v een element f uit de duale V^* van V is zodat $f(v) \neq 0$.
- 5 pt (iv) Zijn W een oneindig-dimensionale vectorruimte met basis B (zodat elk element van W een eindige lineaire combinatie van elementen uit B is). Definieer voor elke $b \in B$ een element f_b uit de duale W^* door $f_b(b) = 1$ en $f_b(c) = 0$ voor elke $c \in B$ met $c \neq b$. Dan is $\{f_b : b \in B\}$ een basis voor W^* .

5. Deze opgave gaat over het construeren en gebruiken van 1-foutenverbeterende lineaire codes over $\mathbf{F}_2$, het lichaam met 2 elementen, 0, 1. Je mag gebruiken dat een code e -foutenverbeterend is dan en slechts dan als $d \geq 2e + 1$. In het vervolg zijn codes steeds binair, dus lineair over $\mathbf{F}_2$, en van dimensie k in $\mathbf{F}_2^n$. We schrijven (code)woorden als rijvectoren.

4 pt (i) Bewijs dat voor het aantal codewoorden van een binaire e -foutenverbeterende code C met woorden van lengte n geldt: $\#C \cdot \sum_{i=0}^e \binom{n}{i} \leq 2^n$.

Één manier om codes te maken, is door het geven van een parity-checkmatrix H : de codewoorden zijn dan de rijvectoren die voldoen aan $v \cdot H = 0$; we zorgen ervoor dat de rang van H precies gelijk is aan het aantal kolommen.

5 pt (ii) Geef alle codewoorden voor de parity-checkmatrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en geef ook de lengte n , dimensie k , minimumafstand d , en het aantal fouten e dat verbeterd kan worden.

We zullen steeds aannemen dat H , net als in onderdeel (ii), op een standaardvorm gebracht is:

$$H = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix},$$

met I een vierkante eenheidsmatrix en A een matrix.

- 3 pt (iii) Wat zijn de afmetingen van I en A , en, beargumenteer dat je H altijd in deze standaardvorm kunt krijgen met kolomoperaties als je ook rijen mag verwisselen.
- 4 pt (iv) Laat C nu gemaakt zijn met de parity-checkmatrix H . Laat zien dat C dan (minstens) 1-foutenverbeterend is als geldt: geen enkele rij van H bestaat alleen uit nullen en geen twee rijen van H zijn gelijk aan elkaar.
- 4 pt (v) Veronderstel dat C een 1-foutenverbeterende binaire code is en dat je een woord v ontvangt dat uit een codewoord is ontstaan doordat op 1 positie een fout is ontstaan. Hoe kun je uit v en H direct berekenen op welke positie i de fout in v is opgetreden?
- 4 pt (vi) Ik wil alle deelnemers aan het tentamen Lineaire Algebra 4 (dat zijn er hoogstens 64, neem ik aan) van een uniek binair codewoord voorzien; om typefouten bij het invullen van de cijferlijst te voorkomen, wil ik dat ik in deze codewoorden 1 gemaakte fout kan verbeteren. Bereken hoe lang ik de codewoorden minstens moet maken en geef ook een goede parity-checkmatrix bij die lengte.