

Voor elk van de 20 onderdelen van de volgende **vier** opgaven zijn 5 punten te verdienen.

1. Beantwoord de volgende vragen voor een transformatie T van $\mathbf{C}^3$ voorzien van het standaardinproduct, waarvan de matrix ten opzichte van de standaardbasis gegeven wordt door:

$$M_T = \begin{pmatrix} 3i - 2 & \frac{5i+5}{3} & -i + 1 \\ 0 & -i & 0 \\ 6i - 6 & 5i + 5 & -2i + 3 \end{pmatrix}.$$

Gegeven is dat het karakteristieke polynoom van T gelijk is aan $-(x^3 - x^2 + x - 1)$ en dat 1 een eigenwaarde is. Motiveer je antwoorden op de volgende onderdelen!

- (i) Is T zelf-geadjungeerd?
- (ii) Is T normaal?
- (iii) Bestaat er een orthonormale basis voor $\mathbf{C}^3$ die bestaat uit eigenvectoren voor T ?
- (iv) Bewijs: er is in ieder geval een basis voor $\mathbf{C}^3$ bestaande uit eigenvectoren voor T .
- (v) Een voorbeeld van zo'n basis van eigenvectoren wordt gevormd door het drietal

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat deze drie eigenvectoren uit $\mathbf{R}^3$ komen; betekent dit dat T een ook een diagonaliseerbare transformatie van $\mathbf{R}^3$ is?

2. Geef in elk van de volgende gevallen een bewijs voor de bewering of toon door middel van een expliciet tegenvoorbeeld de onjuistheid ervan aan.
- (i) De determinant van een 2×2 reële matrix is gelijk aan het product van zijn eigenwaarden.
 - (ii) Voor alle eigenwaarden van een unitaire afbeelding geldt: $|\lambda| = 1$.
 - (iii) Voor een complexe matrix M geldt dat de dimensie van de kern van M gelijk is aan het aantal nullen op de diagonaal van de Jordan normaalvorm J van M .
 - (iv) De 2×2 matrices over het eindige lichaam $\mathbf{F}_2$ van 2 elementen vormen een lichaam van 4 elementen.
 - (v) Een foutenverbeterende code van lengte 5 over $\mathbf{F}_2$ met minimumafstand 3 bestaat uit hoogstens 5 codewoorden.

3. Een transformatie T van $\mathbf{R}^3$ is gegeven door middel van een matrix A . Bovendien is gegeven dat de kern van $(A - 2I)^3$ een vector v bevat die niet in de kern van $(A - 2I)^2$ zit.
- (i) Laat zien dat 2 een eigenwaarde is van A .
 - (ii) Wat is de rang van de matrix $A - 2I$? Motiveer je antwoord.
 - (iii) Uit de gegevens is op te maken wat de Jordan normaalvorm J van A is; geef die (met motivatie).
 - (iv) Veronderstel dat we nu de matrix A en de vector v zouden geven. Beschrijf hoe je dan een basis voor $\mathbf{R}^3$ zou vinden ten opzichte waarvan T als matrix J uit (iii) heeft.
 - (v) De volgende matrix A en vector v voldoen aan de gegevens:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -\frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een matrix Q waarvoor geldt dat $Q^{-1}AQ = J$, (met J als in (iii)).

4. In deze opgave is H een transformatie van een eindig-dimensionale complexe vectorruimte V met een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Bovendien geldt voor de hele opgave dat H voldoet aan $\langle Hv, w \rangle = \langle v, Hw \rangle$ voor elk paar vectoren v, w uit V . (Je mag in deze opgave de stellingen uit het boek over *diagonaliseerbaarheid* zonder bewijs toepassen mits je aangeeft op welk punt en welke stelling je gebruikt.)
- (i) Beredeneer dat elke eigenwaarde van H reëel is.
 - (ii) Bewijs dat $\langle Hv, v \rangle$ reëel is voor elke $v \in V$.
 - (iii) Noem H *positief definitief* wanneer $\langle Hv, v \rangle$ groter dan 0 is voor elke $v \in V$ met $v \neq 0$. Laat zien dat als H positief definitief is, elke eigenwaarde van H (die volgens (i) reëel is) ook *positief* is.
 - (iv) Bewijs omgekeerd, dat als alle eigenwaarden van H positief zijn, H positief definitief is.
 - (v) Laat de afbeelding I_H aan elk tweetal v, w uit V de waarde van $\langle Hv, w \rangle$ toevoegen: $I_H(v, w) = \langle Hv, w \rangle$. Bewijs: als H positief definitief is, is I_H een inproduct op V .