

Voor de volgende 4 opgaven staat in de kantlijn aangegeven hoeveel punten te behalen zijn. Je krijgt 10 punten kado als op elk ingeleverd vel je naam staat.

1. Een lineaire afbeelding T van $\mathbf{R}^3$ wordt gegeven door de matrix

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bovendien is gegeven dat 3 en -1 de enige eigenwaarden van M zijn.

- 4 pt (i) Bepaal de eigenruimten E_3 en E_{-1} voor M .
- 4 pt (ii) Geef het karakteristieke polynoom p_M van M .
- 4 pt (iii) Bepaal een basis voor $\mathbf{R}^3$ ten opzichte waarvan T door een diagonaalmatrix gegeven wordt, en geef ook de bijbehorende diagonaalmatrix D .
- 4 pt (iv) Geef een matrix Φ waarvoor geldt $D = \Phi^{-1} \cdot M \cdot \Phi$.
- 4 pt (v) Laat zien dat $E_3 = (E_{-1})^\perp$.
- 4 pt (vi) Gebruik de methode van Gram-Schmidt om een orthogonale basis voor $\mathbf{R}^3$ te bepalen die bestaat uit eigenvectoren van T .

2. Om je wat rekenwerk te besparen in deze opgave over de kleinste-kwadraten methode, is de volgende matrix en zijn inverse gegeven: voor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

is

$$A^*A = \begin{pmatrix} 165 & 25 \\ 25 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad (A^*A)^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 33 \end{pmatrix}.$$

Gegeven zijn vijf waarnemingen van variabele y op tijdstippen t volgens deze tabel:

$$\begin{array}{rcccccc} t = & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ y = & 6 & 4 & 0 & -5 & -7 \end{array}$$

- 8 pt (i) Bepaal de kleinste kwadratenlijn $y = ct + d$.
- 5 pt (ii) De kleinste-kwadratenlijn minimaliseert de lengte van de vector van verticale afstanden van de waarnemingspunten tot een rechte lijn. Wat is die minimale lengte D hier?
- 5 pt (iii) Bereken, ter vergelijking, ook de lengte van de vector van de verticale afstanden van de lijn door de waarnemingspunten $(1, 6)$ en $(5, 0)$ (en laat zien dat deze groter is dan D).

3. Geef in elk van de volgende gevallen een bewijs voor de bewering of toon door middel van een expliciet tegenvoorbeeld de onjuistheid ervan aan.

6 pt

- (i) De afbeelding

$$I\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right) = 3ad + cf$$

vormt een inproduct op $\mathbf{R}^3$.

6 pt

- (ii) Als v_1 en v_2 eigenvectoren van T zijn met *verschillende* eigenwaarden λ_1 en λ_2 , dan zijn v_1 en v_2 lineair onafhankelijk.

6 pt

- (iii) In $\mathbf{R}^n$ (met het standaard-inproduct, $n > 1$) wordt door twee verschillende vectoren v en w een parallellogram opgespannen. Voor de diagonalen geldt: ze zijn orthogonaal en de som van de kwadraten van hun lengten is gelijk aan tweemaal de som van de kwadraten van de lengten van v en van w .

6 pt

- (iv) Voor $\alpha \in \mathbf{R}$ is de transformatie T_α van $\mathbf{R}^3$ gegeven door de matrix

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

Er geldt: T_α is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als $\alpha = 0$.

4. De lineaire afbeelding T van $\mathbf{R}^4$ is ten opzichte van de standaardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 gegeven door

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deze opgave gaat (onder andere) over $W(z) = \text{span}[z, Tz, T^2z, \dots]$, de *T-cyclische deelruimte van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vector z* .

4 pt

- (i) Bepaal een basis voor $W_i = W(e_i)$, voor $i = 1, 2, 3, 4$; toon de berekeningen.

4 pt

- (ii) Bewijs dat $R^4 = W_3 \oplus W_4$ maar $R^4 \neq W_1 \oplus W_4$ en $R^4 \neq W_2 \oplus W_3$.

4 pt

- (iii) Bepaal het karakteristieke polynoom voor T_{W_1} , de beperking van T tot W_1 , op twee verschillende manieren.

4 pt

- (iv) Bepaal de karakteristieke polynomen voor T_{W_3} en T_{W_4} .

4 pt

- (v) Gebruik de voorgaande onderdelen om het karakteristieke polynoom p_T van T te bepalen.

4 pt

- (vi) Wat zegt de Stelling van Cayley-Hamilton over de matrix B ?