

Tentamen Lineaire Algebra 2, 27 januari 2015, 8:30-11:30, Hal 2

Maak iedere opgave op een **APART BLAD**, voorzien van je **naam** en **studentnummer**.

Opgave 1. (8 pnt) Decodeer de boodschap 18, 24, 5, 106, 56, 47, 27, 46, 6 welke gecodeerd is door de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. i) (5 pnt) Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Schrijf A als product van elementaire matrices.

ii) (5 pnt) Zij $A \in M_n(\mathbb{Z})$ met $\det A = 1$ en $b \in \mathbb{Z}^n$. Laat zien dat $Ax = b$ precies één oplossing $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ heeft zodat alle x_i gehele getallen zijn. ($\mathbb{Z}$ is de verzameling der gehele getallen).

Opgave 3. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

- i) (2 pnt) Als $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ zodat $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dan $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ii) (2 pnt) Zij $n \geq 2$ en $A \in M_n(\mathbb{R})$ zodat $A^3 = A^2$. Dan $A = 0$ of $A = I_n$.
- iii) (3 pnt) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}i\sqrt{2}$ is een lichaam, waarbij $i^2 = -1$.
- iv) (3 pnt) Zij $n \geq 2$ en $A \in M_n(\mathbb{R})$. Als $A^3 = 0$, dan is $I_n + A$ inverteerbaar.

Opgave 4. i) (6 pnt) Zij $n \geq 2$ en $A \in M_n(\mathbb{R})$. Bewijs dat $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

ii) (6 pnt) Zij A de $(n+1) \times (n+1)$ matrix $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^t & I_n \end{pmatrix}$, waarbij $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Bereken $\det A$.