

Tentamen Lineaire Algebra 2

- Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.
- Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.
- Schrijf leesbaar en geef uitleg over je oplossingen; onleesbare antwoorden en antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
- Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.
- Denk aan het invullen van de elektronische enquête in Blackboard.

Opgave 1. (6 punten)

Bewijs of weerleg (bij voorkeur door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

- (i) Zij $E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ de matrix van een elementaire rijoperatie en zij $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de eenheidsmatrix.
Dan is de rang van $E - I_2$ gelijk aan 1.
- (ii) Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een willekeurige matrix en zij $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de eenheidsmatrix.
Dan geldt: $\det(A^2 - I_n) = 0 \Leftrightarrow$ minstens één van $A - I_n$ en $A + I_n$ is niet inverteerbaar.
- (iii) Voor $m < n$ is een stelsel lineaire vergelijkingen met m vergelijkingen en n onbekenden niet eenduidig oplosbaar.

Opgave 2. (6 punten)

Zij $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ een basis van $\mathbb{R}^3$ en zij $U_1 := \text{span}(v_1)$ en $U_2 := \text{span}(v_1, v_2)$. Zij verder $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een lineaire transformatie met de eigenschap dat $T(U_1) \subseteq U_1$ en $T(U_2) \subseteq U_2$.

- (i) Laat zien dat $A := [T]_{\beta}^{\beta}$ van de vorm $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ met $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ is.

Onder welke voorwaarden aan a, b, c, d, e, f is T een isomorfisme?

- (ii) Stel dat $B = \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Laat zien dat B inverteerbaar is en bepaal de inverse matrix van B .

- (iii) Stel dat T een isomorfisme is. Laat zien dat dan voor de inverse lineaire transformatie T^{-1} geldt dat $T^{-1}(U_1) \subseteq U_1$ en $T^{-1}(U_2) \subseteq U_2$.

Opgave 3. (6 punten)

Zij T de lineaire transformatie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$T((x, y, z)) := (x + y + z, -x + z, -x + y).$$

- (i) Geef de matrix $[T]_{\beta}^{\beta}$ van T met betrekking tot de standaardbasis β van $\mathbb{R}^3$ aan.
- (ii) Zij α de basis $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ van $\mathbb{R}^3$.

Bepaal de matrix $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ van T met betrekking tot de basis α .

- (iii) Zij $v_0 := (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Voor $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ zij $v_i := T^i(v_0)$ waarbij we met $T^i = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{i \text{ keer}}$ de i -voudige samenstelling van T met zich zelf noteren, d.w.z. $v_1 = T(v_0)$, $v_2 = T(T(v_0))$, $v_3 = T(T(T(v_0)))$ enz.

Bepaal een basis voor $\text{span}(v_0, v_1, v_2, v_3 \dots) = \text{span}(v_i \mid i \in \mathbb{N})$.

Opgave 4. (4 punten)

Zij V een vectorruimte met lineaire deelruimten $U, W \subseteq V$ en stel dat $U \subseteq W$.

- (i) Zij $v_1 + U$ een restklasse in V/U en $v_2 + W$ een restklasse in V/W .

Bewijs dat óf $(v_1 + U) \cap (v_2 + W)$ de lege verzameling is óf $v_1 + U \subseteq v_2 + W$.

- (ii) Zij $V := \mathbb{R}^3$, $U := \text{span}((1, 1, 1))$ en $W := \text{span}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$.

Welke van de twee restklassen $(1, 0, 0) + U$ en $(0, 1, 0) + U$ uit V/U is een deelverzameling van de restklasse $(0, 0, 1) + W$ uit V/W ? Licht je antwoord toe!

Opgave 5. (6 punten)

We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat van een parameter $a \in \mathbb{R}$ afhangt:

$$\begin{array}{rcl} x + a \cdot y + z & = & 1 \\ x + y + a \cdot z & = & a \\ 2 \cdot x - y - z & = & 2 \end{array}$$

- (i) Bepaal de matrix van dit stelsel vergelijkingen, de uitgebreide matrix van het stelsel en de determinant van de matrix van het stelsel.
- (ii) Voor welke waarden van de parameter a heeft het stelsel geen oplossing, voor welke een eenduidige oplossing en voor welke meer dan één oplossing?
- (iii) Bepaal voor $a = 1$ en voor $a = -1$ telkens de oplossingsverzameling van het stelsel.
- (iv) Het tutoruur van de cursus *Constante functies* is opgesplitst in twee groepen, W en N . In totaal nemen 112 studenten aan het tutoruur deel en niemand valt in de loop der tijd af (maar er komt ook niemand bij)! In verband met roosterproblemen en persoonlijke voorkeuren schakelt een zesde van de studenten in groep W na twee weken over naar groep N en tegelijkertijd schakelt een kwart van de studenten in groep N over naar groep W . Hierdoor zijn de twee groepen vanaf de derde week precies even groot.

Hoeveel studenten zaten er in het begin van de cursus in ieder van de twee groepen?

Succes ermee!