Tentamen Lineaire Algebra 2 (kans B)

- *Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.*
- *Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.*
- *Schrijf leesbaar en geef uitleg over je oplossingen; onleesbare antwoorden en antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!*
- *Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.*

Opgave 1. (7 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat van een parameter $a \in \mathbb{R}$ afhangt:

$$\begin{array}{rcr} a \cdot x + \quad y - 2 \cdot z & = & 1 \\ a \cdot x \qquad\quad - 3 \cdot z & = & 1 \\ 2 \cdot x + a \cdot y + \quad z & = & -1 \end{array}$$

(i) Bepaal de matrix van dit stelsel vergelijkingen, de uitgebreide matrix van het stelsel en de determinant van de matrix van het stelsel.

(ii) Is de matrix van het stelsel voor $a = 2$ inverteerbaar? Zo nee, geef een reden, zo ja, bepaal de inverse matrix.

(iii) Voor welke waarden van a heeft het stelsel geen oplossing?

(iv) Kies een waarde voor a waarvoor het stelsel geen oplossing heeft.

Geef een aangepaste rechterzijde aan die in precies één component van $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verschilt zo dat het stelsel met de aangepaste rechterzijde voor deze a wel een oplossing heeft.

Opgave 2. (6 punten)
De vectoren $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ en $(0,1,1)$ vormen een basis van $\mathbb{R}^3$ (dit hoef je niet te bewijzen). Door

$$\begin{aligned} T((1,1,0)) &:= (1,-1,0) \\ T((1,0,1)) &:= (0,1,-1) \\ T((0,1,1)) &:= (-1,0,1) \end{aligned}$$

wordt een eenduidige lineaire transformatie T van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ vastgelegd.

(i) Geef de matrix $[T]_\beta^\beta$ van T met betrekking tot de standaardbasis β van $\mathbb{R}^3$ aan.

(ii) Zij $v := (1,2,3)$. Laat zien dat $T^2(v) - 3v$ in de kern van T ligt.

(iii) Zij $w := (1,1,-2) \in \mathbb{R}^3$. Bepaal alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ met $T(v) = w$.

Opgave 3. (5 punten)

Zij $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gedefinieerd door $(A_n)_{ij} := \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ 1 & \text{als } |i-j| = 1\,, \text{ d.w.z.} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bereken $\det A_n$ voor $n = 2, 3, 4, 5$.

(ii) Bepaal $\det A_n$ voor $n = 2014$.

(Hint: Er is een makkelijke formule voor $\det A_n$ afhankelijk van n. Druk hiervoor $\det A_n$ uit met de determinanten van matrices A_m voor kleinere m.)

Opgave 4. (9 punten)

Bewijs of weerleg (bij voorkeur door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

(i) Zij $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een inverteerbare matrix en zij $A\boldsymbol{x} = b$ een stelsel lineaire vergelijkingen met coëfficiëntenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en rechterzijde $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) $A\boldsymbol{x} = b$ is oplosbaar dan en slechts dan als $AB\boldsymbol{x} = b$ oplosbaar is.

(b) $A\boldsymbol{x} = b$ is oplosbaar dan en slechts dan als $BA\boldsymbol{x} = b$ oplosbaar is.

(ii) Zij $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de eenheidsmatrix en zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een willekeurige matrix met $A^2 = 0$.

Dan zijn $I_n + A$ en $I_n - A$ inverteerbare matrices.

(iii) Zij A een 3×2 matrix en B een 2×3 matrix.

Dan is $\det(AB) = 0$.

(iv) In $\mathbb{R}^3$ zij $U := \operatorname{span}((1, 1, 1))$.

Voor $v, w \in \mathbb{R}^3$ is $\{v + U, w + U\}$ een basis van de quotiëntenruimte $\mathbb{R}^3/U$ dan en slechts dan als $\{v, w\}$ lineair onafhankelijk is.

Succes ermee!