

## Tentamen Lineaire Algebra 2

- Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.
- Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.
- Schrijf leesbaar en geef uitleg over je oplossingen; onleesbare antwoorden en antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
- Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.
- **Denk aan het invullen van de elektronische enquête in Blackboard.**

### Opgave 1. (8 punten)

Bewijs of weerleg (bij voorkeur door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

- (i) Laten  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  willekeurige matrices zijn.

Dan geldt  $\det(A(B + C)) = \det(AB) + \det(AC)$ .

- (ii) Zij  $A$  een  $n \times n$  matrix met  $\det A = 0$ .

Dan is  $A^n = 0$  (de nulmatrix).

- (iii) Zij  $V$  een eindig-dimensionale  $\mathbb{R}$ -vectorruimte en  $T : V \rightarrow V$  een lineaire transformatie met  $N(T) \neq V$ .

Dan zijn er bases  $\alpha$  en  $\beta$  van  $V$  zo dat de eerste kolom van de matrix  $[T]_{\alpha}^{\beta}$  van  $T$  met

betrekking tot deze bases gelijk is aan  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (iv) Zij  $0 \neq u \in \mathbb{R}^3$  en zij  $U := \text{span}(u)$ .

Voor  $v, w \in \mathbb{R}^3$  is dan  $\{u, v, w\}$  een basis van  $\mathbb{R}^3$  dan en slechts dan als  $\{v + U, w + U\}$  een basis van de quotiëntenruimte  $\mathbb{R}^3/U$  is.

### Opgave 2. (7 punten)

Zij  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  en  $B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

- (i) Bereken de inverse matrix  $A^{-1}$  van  $A$ .

- (ii) Schrijf de matrices  $A$ ,  $A^{-1}$  en  $B$  als producten van elementaire matrices.

- (iii) Vind een matrix  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  met  $C^2 = B$ .

(Hint: Een mogelijke  $C$  is een bovendriehoeksmatrix.)

**Opgave 3.** (7 punten)

Zij  $T$  de lineaire transformatie van  $\mathbb{R}^3$  naar  $\mathbb{R}^3$  gegeven door

$$T((x, y, z)) := (x - 2y + 2z, -y + z, -2x + 2y - z).$$

- (i) Geef de matrix  $[T]_{\beta}^{\beta}$  van  $T$  met betrekking tot de standaardbasis  $\beta$  van  $\mathbb{R}^3$  aan.
- (ii) Bepaal een basis voor de lineaire deelruimte  $U := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = -v\}$ .
- (iii) Zij  $W := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(T(v)) = -v\}$ .  
Laat zien dat  $U \cap W = \{0\}$  en bepaal een basis van  $W$ .
- (iv) Bewijs dat  $T(W) \subseteq W$ .

**Opgave 4.** (5 punten)

Zij  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  een lineaire transformatie met  $0 < \dim R(T) < n$ .

- (i) Laat zien dat er een lineaire transformatie  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bestaat met  $S \neq 0$  (d.w.z.  $S$  niet de nulafbeelding) zo dat  $S \circ T = 0$  en  $T \circ S = 0$ .
- (ii) Bepaal voor  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  alle matrices  $B$  met  $\text{rang}(B) > 0$  zo dat  $AB = 0$  en  $BA = 0$ .

**Opgave 5.** (7 punten)

We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat van een parameter  $k \in \mathbb{R}$  afhangt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & 2kz & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 6z & = & 2 \\ kx & & & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

- (i) Bepaal de determinant van de matrix van dit stelsel vergelijkingen.
- (ii) Voor welke waarden van de parameter  $k$  heeft het stelsel een eenduidige oplossing?
- (iii) Voor welke waarden van de parameter  $k$  heeft het stelsel geen oplossing?
- (iv) Voor welke waarden van de parameter  $k$  heeft het stelsel meer dan één oplossing?  
Bepaal in deze gevallen de oplossingsverzameling.
- (v) Het tutoruur van de cursus *Circulaire algebra* is opgesplitst in twee groepen,  $W$  en  $N$ . In totaal nemen 55 studenten aan het tutoruur deel en niemand valt in de loop van de tijd af (maar er komt ook niemand bij)! In verband met roosterproblemen en persoonlijke voorkeuren schakelt 20% van de studenten in groep  $W$  na twee weken over naar groep  $N$  en tegelijkertijd schakelt 30% van de studenten in groep  $N$  over naar groep  $W$ . Hierdoor zitten in groep  $N$  vanaf de derde week 4 studenten minder dan in het begin van de cursus. Hoeveel studenten zaten er in het begin van de cursus in ieder van de twee groepen?

**Succes ermee!**