

Tentamen Lineaire Algebra 1, 8 januari 2015, 18:00-21:00, HG00.304

Maak iedere opgave op een **APART BLAD**, voorzien van je **naam** en **studentnummer**.

Opgave 1. Zij $U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$.

- i) (3 pnt) Bewijs dat U een vectorruimte is.
- ii) (4 pnt) Bepaal een basis voor U .
- iii) (3 pnt) Geef een $A \in U$ zodat $A^2 \notin U$.

Opgave 2. Zij $V := P_3(\mathbb{R})$ (=de vectorruimte der veeltermen met graad ≤ 3). Voor $f \in V$ definiëren we $L(f) = (x - 1)f'(x)$.

- i) (2 pnt) Bewijs dat $L(f) \in V$, voor alle $f \in V$.
(We krijgen dus een afbeelding $L : V \rightarrow V$).
- ii) (2 pnt) Laat zien dat L een lineaire afbeelding is.
- iii) (3 pnt) Geef een basis voor $\ker L$.
- iv) (3 pnt) Bereken eerst $\dim \operatorname{Im} L$ (**zonder $\operatorname{Im} L$ uit te rekenen**). Geef daarna een basis voor $\operatorname{Im} L$.

Opgave 3. Geef voor ieder van de onderstaande beweringen een bewijs of een tegenvoorbeeld.

- i) (2,5 pnt) e^x, e^{2x}, e^{3x} zijn lineair onafhankelijk.
- ii) (2,5 pnt) Zij V een **willekeurige** vectorruimte en $L : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Als L surjectief is, dan is L injectief.
- iii) (2,5 pnt) Zij V een vectorruimte en U en W lineaire deelruimten. Dan $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.
- iv) (2,5 pnt) Zij V een verzameling en $T : V \rightarrow V$ een afbeelding. Als $T^2(v) = v$, voor alle $v \in V$, dan is T injectief.

Opgave 4. Zij U de lineaire deelruimte van $P_3(\mathbb{R})$ opgespannen door $1 + x, x + x^2, 1 - x^2, 1 - x^3$.

- i) (4 pnt) Bepaal een basis voor U .
- ii) (2 pnt) Wat is $\dim U$?
- iii) (4 pnt) De vectoren $1 - x, 1 + x^3, -x + x^2$ vormen een onafhankelijk stelsel in $P_3(\mathbb{R})$. Zij $W := \langle 1 - x, 1 + x^3, -x + x^2 \rangle$ het opspansel van deze vectoren. Wat is $d := \dim W$. Geef een isomorfisme aan tussen $\mathbb{R}^d$ en W .