

Tentamen Lineaire Algebra 1

- Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.
- Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.
- Schrijf leesbaar en geef uitleg over je oplossingen; onleesbare antwoorden en antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
- Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.
- Denk aan het invullen van de elektronische enquête in Blackboard.

Opgave 1. (6 punten)

Zij $F_{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ de reële vectorruimte van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

Welke van de volgende deelverzamelingen van $F_{\mathbb{R}}$ zijn lineaire deelruimten? Geef uitleg over je antwoorden.

- (i) $U := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f = 0 \text{ of } f(x) > 2013 \text{ voor een } x \in \mathbb{R}\}.$
- (ii) $V := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(0) - 2f(\pi) + f(2\pi) = 0\}.$
- (iii) $W := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(x^2) = x \cdot f(2x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}.$

Opgave 2. (6 punten)

In $\mathbb{R}^5$ zijn de volgende vijf vectoren gegeven:

$$\begin{aligned} v_1 &:= (1, 1, 0, -1, 1), & v_2 &:= (2, 0, 1, 1, 1), & v_3 &:= (0, 1, 1, 1, 0), \\ v_4 &:= (0, 0, 1, 1, -1), & v_5 &:= (1, 2, 0, -1, 2). \end{aligned}$$

Zij $\alpha := \{v_1, v_2, v_3\}$, $U := \text{span}(\alpha) = \text{span}(v_1, v_2, v_3)$ en $\beta := \{v_4, v_5\}$, $W := \text{span}(\beta) = \text{span}(v_4, v_5)$.

- (i) Laat zien dat $\alpha \cup \beta$ lineair afhankelijk is.
- (ii) Vind een vector $v \neq 0$ in $U \cap W$.
- (iii) Bepaal twee verschillende deelverzamelingen van $\alpha \cup \beta$ die een basis van $U + W$ vormen.

Opgave 3. (5 punten)

Zij V een n -dimensionale vectorruimte en zij U een lineaire deelruimte van V .

Een lineaire deelruimte $W \subseteq V$ heet een **complementaire deelruimte** van U als $U + W = V$ en $U \cap W = \{0\}$.

- (i) Bewijs dat voor een complementaire deelruimte W van U geldt dat $\dim W = n - \dim U$.
- (ii) Toon aan dat een complementaire deelruimte van U daadwerkelijk bestaat.
- (iii) Laten $X \subseteq U$ twee lineaire deelruimten van V zijn die in elkaar bevat zijn.

Laat zien dat er een complementaire deelruimte W van U en een complementaire deelruimte Y van X bestaat zo dat $W \subseteq Y$.

Opgave 4. (6 punten)

Zij $U := \text{span}((1, 1, 1, 0), (1, -1, 1, -1)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (i) Geef bases aan van lineaire deelruimten $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ met $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ en
 - (a) $\dim U \cap W_1 = 0$;
 - (b) $\dim U \cap W_2 = 1$.
- (ii) Geef lineaire transformaties $T_1, T_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aan met $N(T_1) = N(T_2) = U$ en
 - (a) $\dim N(T_1) \cap R(T_1) = 2$;
 - (b) $\dim N(T_2) \cap R(T_2) = 1$.

Licht je antwoorden toe!

Opgave 5. (6 punten)

Zij $T : V \rightarrow W$ een lineaire transformatie tussen de vectorruimten V en W en zij $v_1, \dots, v_k \in V$ en $w_1, \dots, w_k \in W$ zo dat $T(v_i) = w_i$ voor $i = 1, \dots, k$. Bewijs of weerleg (door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

- (i) Als $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineair onafhankelijk in V , dan is ook $\{w_1, \dots, w_k\}$ lineair onafhankelijk in W .
- (ii) Als $\{w_1, \dots, w_k\}$ lineair onafhankelijk in W , dan is ook $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineair onafhankelijk in V .
- (iii) Zij U een lineaire deelruimte van W , dan is de verzameling $\{v \in V \mid T(v) \in U\}$ een lineaire deelruimte van V .

Succes ermee!