

Tentamen Lineaire Algebra 1

- Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.
- Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.
- Schrijf leesbaar en geef uitleg over je oplossingen; onleesbare antwoorden en antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
- Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.
- **Denk aan het invullen van de elektronische enquête in Blackboard.**

Opgave 1. (6 punten)

Zij $P(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ de reële vectorruimte van veeltermfuncties over $\mathbb{R}$.

Welke van de volgende deelverzamelingen van $P(\mathbb{R})$ zijn lineaire deelruimten? Geef uitleg over je antwoorden.

- (i) $U := \{f \in P(\mathbb{R}) \mid f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = 0\}$.
- (ii) $V := \{f \in P(\mathbb{R}) \mid f = 0 \text{ of } f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \text{ met } n \geq 2 \text{ en } a_n \neq 0\}$, d.w.z. V bevat de veeltermen van graad minstens 2 en de nulfunctie.
- (iii) $W := \{f \in P(\mathbb{R}) \mid x f'(x) - f(x) = 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$, waarbij f' de afgeleide van f is.

Opgave 2. (7 punten)

In $\mathbb{R}^4$ zijn de volgende vijf vectoren gegeven:

$$v_1 := (1, 1, 0, 1), \quad v_2 := (2, 1, 2, 0), \quad v_3 := (1, 0, 2, 0), \quad v_4 := (0, 1, -2, 1), \quad v_5 := (1, 0, 0, -1).$$

- (i) Vind een niet-triviale lineaire combinatie van de vectoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 die de nulvector geeft.
- (ii) Laat zien dat $\text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathbb{R}^4$.
- (iii) Bepaal **alle** deelverzamelingen van $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ die een basis van $\mathbb{R}^4$ vormen.

Opgave 3. (4 punten)

Laten U, W eindig-dimensionale lineaire deelruimten van een reële vectorruimte V zijn met $\dim U = m$ en $\dim W = l$ en veronderstel dat $m \leq l$.

- (i) Laat zien dat $\dim(U \cap W) \leq m$ en dat $\dim(U + W) \leq m + l$.
- (ii) Stel U, W zijn lineaire deelruimten van $V = \mathbb{R}^5$ met $\dim U \leq \dim W$ die voldoen aan $\dim(U \cap W) \not\leq \dim U$ en $\dim(U + W) \not\leq \dim U + \dim W \not\leq \dim V$.

Bepaal alle mogelijkheden voor de dimensies $\dim U$ en $\dim W$ die aan deze voorwaarden voldoen en geef voor iedere van deze mogelijkheden een expliciet voorbeeld.

Opgave 4. (7 punten)

Zij $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de lineaire transformatie gegeven door

$$\begin{aligned} T((1, 0, 0, 0)) &:= (1, -1, 1, -1), & T((0, 1, 0, 0)) &:= (1, 1, -2, 0), \\ T((0, 0, 1, 0)) &:= (0, -2, 3, -1), & T((0, 0, 0, 1)) &:= (2, 0, -1, -1). \end{aligned}$$

- (i) Bepaal een basis voor de kern $N(T)$ van T en een basis voor het beeld $R(T)$ van T .
- (ii) Lig de vector $w = (1, 2, 3, 4)$ in het beeld van T ? Licht je antwoord toe.
- (iii) Geef twee verschillende vectoren $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}^4$ aan zo dat $T(v_1) = T(v_2) = (0, 2, -3, 1)$.
- (iv) Bepaal de dimensie van $N(T) \cap R(T)$.

Opgave 5. (8 punten)

Zij V een reële vectorruimte. Bewijs of weerleg (door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

- (i) Laten U en W lineaire deelruimten van V zijn met $U \cap W = \{0\}$. Verder zij $\alpha = \{u_1, \dots, u_k\}$ een basis van U en $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ een basis van W .
Dan is $\alpha \cup \beta = \{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$ lineair onafhankelijk.
- (ii) Stel dat $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ een basis van V is en zij $U := \text{span}(v_1, v_2)$.
Dan is er een basis $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ van V zo dat $w_i \notin U$ voor $i = 1, 2, 3$.
- (iii) Zij $\dim V = n$. Stel dat U en W lineaire deelruimten van V zijn met $\dim U = \dim W = n - 1$.
Dan is $\dim(U \cap W) \geq n - 2$.
- (iv) Zij $T : V \rightarrow V$ een lineaire transformatie en zij $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ lineair onafhankelijk in V .
Dan is $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_r)\}$ lineair onafhankelijk in V .

Succes ermee!