Tentamen Lineaire Algebra A (kans B)

Opgave 1. *(8 punten)*

(i) Gegeven is $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ en $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bepaal alle $v \in \mathbb{R}^3$ met $Av = w$.

(ii) Vind alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \right)$ ligt.

(iii) Zij $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de matrix gegeven door $B_{ij} = i + j$.

Bereken $\det B$ voor $n = 2, 3, 5$ en 7 (d.w.z. voor alle priemgetallen kleiner dan 10).

Opgave 2. *(8 punten)*
In $\mathbb{R}^4$ zijn de twee lineaire deelruimten

$$U_a = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4+a \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a-1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ en } W_a = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ a+1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a+10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

gegeven, waarbij $a \in \mathbb{R}$.

(i) Bepaal $\dim U_a$ en $\dim W_a$, afhankelijk van de parameter $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Bepaal $\dim(U_a + W_a)$ en $\dim(U_a \cap W_a)$, afhankelijk van de parameter $a \in \mathbb{R}$.

In de gevallen waar $\dim(U_a \cap W_a) > 0$, geef ook een basis aan van $U_a \cap W_a$.

Opgave 3. *(6 punten)*
We noemen twee matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *equivalent* als ze door elementaire rij- en kolomoperaties in elkaar getransformeerd kunnen worden.

(i) Laat zien dat A, B equivalent zijn dan en slechts dan als er inverteerbare matrices $P \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ en $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ bestaan met $B = PAQ$.

(ii) Zij I_n de $n \times n$-eenheidsmatrix en zij $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ equivalent met I_n.

Bewijs dat A inverteerbaar is.

(iii) Geef een voorbeeld van equivalente matrices A en B die niet in elkaar getransformeerd kunnen worden door uitsluitend elementaire rijoperaties of uitsluitend elementaire kolomoperaties toe te passen.

z.o.z. voor Opgave 4

Opgave 4. *(10 punten)*
Zij $P(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{R}$ en $P_2(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte van polynomen van graad hoogstens 2.
De lineaire afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ is gegeven door

$$T(p(x)) = \big((2x-1)\,p(x)\big)'$$

waarbij we met $'$ zoals gebruikelijk de afgeleide noteren.

(i) Laat zien dat het beeld $\mathrm{R}(T)$ in $P_2(\mathbb{R})$ bevat is en bewijs dat T als afbeelding van $P_2(\mathbb{R})$ naar $P_2(\mathbb{R})$ inverteerbaar is.

(ii) Geef de matrix $A = [T]_\beta^\beta$ van T met betrekking tot de standaardbasis $(1, x, x^2)$ van $P_2(\mathbb{R})$.

Bepaal de inverse matrix A^{-1} van A en geef een polynoom $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ aan met $T(p(x)) = 6x^2 - 6x + 5$.

(iii) Bereken de eigenwaarden en de bijhorende eigenruimten van T.

(iv) Geef een basis γ van $P_2(\mathbb{R})$ aan zodat de inverse afbeelding T^{-1} met betrekking tot γ een diagonaalmatrix heeft.

Succes ermee!