Uitwerkingen Tentamen Lineaire Algebra A (kans B)

Opgave 1. *(8 punten)*

(i) Gegeven is $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ en $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bepaal alle $v \in \mathbb{R}^3$ met $Av = w$.

(ii) Vind alle $k \in \mathbb{R}$ waarvoor de vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \right)$ ligt.

(iii) Zij $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de matrix gegeven door $B_{ij} = i + j$.

Bereken $\det B$ voor $n = 2, 3, 5$ en 7 (d.w.z. voor alle priemgetallen kleiner dan 10).

Oplossing:

(i) **(3 punten)** Dit lossen we op door vegen van de uitgebreide matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{O_{12}(1) \\ O_{13}(-1)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{M_3(\frac{1}{4}) \\ P_{23}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hieruit lezen we de particuliere oplossing $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ af en dat de kern van A opgespannen is door $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. De verzameling van $v \in \mathbb{R}^3$ met $Av = w$ is dus $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c \\ -1 + 2c \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$.

(ii) **(2 punten)** Omdat $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \right)$ duidelijk lineair onafhankelijk is, ligt $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in het opspansel van deze twee vectoren dan en slechts dan als de matrix met deze drie kolommen determinant gelijk aan nul heeft. Er geldt $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & k & 4 \end{pmatrix} = 8 + 36 + 15k - 60 - 2k - 36 = -52 + 13k$ en dit is nul voor $k = 4$.

Alternatief laat zich dit natuurlijk ook middels vegen oplossen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & k & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{O_{12}(-3) \\ O_{13}(-6)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -13 \\ 0 & k-18 & -26 \end{array}\right).$$

De tweede vergelijking is $-7y = -13$ en geeft dus $y = \frac{13}{7}$ en invullen in de derde geeft dan $(k - 18)\frac{13}{7} = -26$, dus $k - 18 = -14$, d.w.z. $k = 4$.

(iii) **(3 punten)** Voor $n = 2$ is $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $\det B = -1$.

Natuurlijk hoef je in een tentamen geen 5×5 of 7×7 determinant met de hand uit te rekenen, dus moet er wel een patroon zijn.

Voor $n \geq 3$ kunnen we de eerste rij van de tweede en van de derde rij aftrekken, uit de matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & \dots & n+2 \\ 4 & 5 & \dots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$ wordt dan $\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$ die dezelfde determinant heeft als B. Omdat de derde rij het dubbele is van de tweede rij zijn de rijen lineair afhankelijk, dus is de determinant van deze matrix nul, en dus is $\det B = 0$ voor $n \geq 3$ en i.h.b. dus voor $n = 3, 5, 7$.

Opgave 2. *(8 punten)*
In $\mathbb{R}^4$ zijn de twee lineaire deelruimten

$$U_a = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4+a \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a-1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ en } W_a = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ a+1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a+10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

gegeven, waarbij $a \in \mathbb{R}$.

(i) Bepaal $\dim U_a$ en $\dim W_a$, afhankelijk van de parameter $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Bepaal $\dim(U_a + W_a)$ en $\dim(U_a \cap W_a)$, afhankelijk van de parameter $a \in \mathbb{R}$.

In de gevallen waar $\dim(U_a \cap W_a) > 0$, geef ook een basis aan van $U_a \cap W_a$.

Oplossing:

(i) **(3 punten)** Er geldt $\dim U_a = 2$ behalve als de twee vectoren veelvouden van elkaar zijn. Uit de laatste component volgt dat dit het geval is als $4 + a = 6$ en $2 = 2(a-1)$. Aan beide vergelijkingen is voldaan als $a = 2$ (en voor geen andere waarde van a), dus is $\dim U_a = 1$ voor $a = 2$ en $\dim U_a = 2$ voor $a \neq 2$.

In W_a is de tweede vector geen veelvoud van de eerste, behalve als het de nulvector is, d.w.z. voor $a = -10$, dus is $\dim W_a = 1$ voor $a = -10$ en $\dim W_a = 2$ voor $a \neq -10$.

(ii) **(5 punten)** Uit de vierde en eerste component volgt dat de tweede gegeven vector uit W_a alleen in U_a kan liggen als $4 + a = 6$, dus voor $a = 2$, maar dan zien we direct dat het niet werkt. Omdat in U_a de derde component altijd nul is, zien we nu dat een niet-nul vector uit W_a alleen in U_a kan liggen als $a + 1 = 0$, d.w.z. als $a = -1$. Voor $a \neq -1$ is dus $\dim(U_a \cap W_a) = 0$.

Het is duidelijk dat voor $a = -1$ het opspansel van U_a en W_a hoogstens rang 3 kan hebben, omdat bij alle vier vectoren de derde component nul is. Volgens de dimensiestelling is in dit geval dus $\dim(U_a \cap W_a) \geq 1$.

Om een vector in de doorsnede te vinden, bepalen we een niettriviale lineaire combinatie van de vier gegeven vectoren die nul geeft, d.w.z. een vector in de kern van de matrix met deze vectoren als kolommen. Vegen van deze matrix (voor $a = -1$) geeft

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{M_1(\frac{1}{3}) \\ P_{34}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 9 \\ -2 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{O_{12}(-2) \\ O_{13}(2)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{O_{32}(4) \\ P_{23}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en hieruit lezen we af dat $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in de kern ligt.

Dit geeft $4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \in U_a \cap W_a$ voor $a = -1$.

Samengevat hebben we laten zien dat

- $\dim(U_a + W_a) = 4$ en $\dim(U_a \cap W_a) = 0$ voor $a \neq 2, -10, -1$,
- $\dim(U_a + W_a) = 3$ en $\dim(U_a \cap W_a) = 0$ voor $a = 2, -10$ en
- $\dim(U_a + W_a) = 3$ en $\dim(U_a \cap W_a) = 1$ voor $a = -1$.

Alternatief kunnen we middels de determinant van de matrix met de vier gegeven vectoren (als rijen of kolommen) bepalen voor welke a geldt dat $\dim(U_a + W_a) = 4$. We vinden

$$\det \begin{pmatrix} 4+a & 3 & 3 & 0 \\ 2 & a-1 & 5 & a+10 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ -2 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = (a+10) \det \begin{pmatrix} 4+a & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= -(a+1)(a+10) \det \begin{pmatrix} 4+a & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = (a-2)(a+1)(a+10).$$

Voor $a \neq 2, -1, -10$ is dus $\dim(U_a + W_a) = 4$ en in deze gevallen volgt uit de dimensiestelling $\dim U_a + \dim W_a = \dim(U_a + W_a) + \dim(U_a \cap W_a)$ en deel (i) noodzakelijk dat $\dim U_a = \dim W_a = 2$ en $\dim(U_a \cap W_a) = 0$.

De drie gevallen $a = 2, -1, -10$ moeten dan apart onderzocht worden, in ieder geval geldt dat $\dim(U_a + W_a) = 3$. Voor $a = 2$ en $a = -10$ volgt middels de dimensiestelling en deel (i) dat $\dim(U_a \cap W_a) = 0$, in het geval $a = -1$ geeft de dimensiestelling dat $\dim(U_a \cap W_a) = 1$, en een vector in de doorsnede wordt dan zoals boven aangegeven gevonden.

Opgave 3. *(6 punten)*
We noemen twee matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ *equivalent* als ze door elementaire rij- en kolomoperaties in elkaar getransformeerd kunnen worden.

(i) Laat zien dat A, B equivalent zijn dan en slechts dan als er inverteerbare matrices $P \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ en $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ bestaan met $B = PAQ$.

(ii) Zij I_n de $n \times n$-eenheidsmatrix en zij $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ equivalent met I_n.

Bewijs dat A inverteerbaar is.

(iii) Geef een voorbeeld van equivalente matrices A en B die niet in elkaar getransformeerd kunnen worden door uitsluitend elementaire rijoperaties of uitsluitend elementaire kolomoperaties toe te passen.

Oplossing:

(i) **(3 punten)** Stel A en B zijn equivalent. Toepassen van een rijoperatie wordt bereikt door van links met een elementaire matrix E te vermenigvuldigen en toepassen van een kolomoperatie door van rechts met een elementaire matrix E' te vermenigvuldigen. Omdat elementaire matrices inverteerbaar zijn is het product van de matrices E een inverteerbare matrix P en het product van de E' een inverteerbare matrix Q en er geldt $B = PAQ$.

Omgekeerd is iedere inverteerbare matrix een product van elementaire matrices en vermenigvuldigen met een elementaire matrix heeft hetzelfde effect als het toepassen van de corresponderende elementaire operatie.

(ii) **(1 punt)** Stel dat $PAQ = I_n$, dan is $PA = Q^{-1}$ en dus $QPA = I_n$. In het bijzonder is A inverteerbaar met $A^{-1} = QP$.

Net zo goed laat zich uit $PAQ = I_n$ afleiden (door van links met P^{-1} en van rechts met Q^{-1} te vermenigvuldigen) dat $A = P^{-1}Q^{-1}$ en $P^{-1}Q^{-1} = (QP)^{-1}$ is inverteerbaar met inverse QP.

Nog korter is natuurlijk dat uit $PAQ = I_n$ volgt dat $\det(P)\cdot\det(A)\cdot\det(Q) = \det(PAQ) = 1$, dus moet $\det A \neq 0$ zijn en dan is A inverteerbaar.

(iii) **(2 punten)** Neem bijvoorbeeld $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bij elementaire rijoperaties behoudt A een nulkolom in de tweede kolom en bij elementaire kolomoperaties een nulrij in de tweede rij. In beide gevallen kan B niet bereikt worden.

Anderzijds transformeert verruilen van de rijen en vervolgens verruilen van de kolommen A naar B, dus zijn de matrices inderdaad equivalent.

Opgave 4. *(10 punten)*
Zij $P(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{R}$ en $P_2(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$ de lineaire deelruimte van polynomen van graad hoogstens 2.
De lineaire afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ is gegeven door

$$T(p(x)) = \big((2x-1)\,p(x)\big)'$$

waarbij we met $'$ zoals gebruikelijk de afgeleide noteren.

(i) Laat zien dat het beeld $\mathrm{R}(T)$ in $P_2(\mathbb{R})$ bevat is en bewijs dat T als afbeelding van $P_2(\mathbb{R})$ naar $P_2(\mathbb{R})$ inverteerbaar is.

(ii) Geef de matrix $A = [T]_\beta^\beta$ van T met betrekking tot de standaardbasis $(1, x, x^2)$ van $P_2(\mathbb{R})$.

Bepaal de inverse matrix A^{-1} van A en geef een polynoom $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ aan met $T(p(x)) = 6x^2 - 6x + 5$.

(iii) Bereken de eigenwaarden en de bijhorende eigenruimten van T.

(iv) Geef een basis γ van $P_2(\mathbb{R})$ aan zodat de inverse afbeelding T^{-1} met betrekking tot γ een diagonaalmatrix heeft.

Oplossing:

(i) **(2 punten)** Voor $p(x)$ van graad ≤ 2 is $(2x-1)p(x)$ van graad ≤ 3 en dus $T(p(x)) = ((2x-1)p(x))'$ van graad ≤ 2, dus is $T(P_2(\mathbb{R})) \subseteq P_2(\mathbb{R})$.

Voor $p(x)$ met hoogste term $a_n x^n$ heeft $T(p(x))$ de hoogste term $2a_n x^n + 2na_n x^n = 2a_n(n+1)x^n$ en deze kan alleen nul zijn voor $a_n = 0$, dus voor het nulpolynoom. Dit betekent dat T injectief is, en dus als afbeelding van $P_2(\mathbb{R})$ naar $P_2(\mathbb{R})$ surjectief en dus ook inverteerbaar.

Natuurlijk laat zich dit ook aantonen door expliciet de beelden van de basisvectoren te bereken (zie deel (ii)).

(ii) **(3 punten)** Voor de elementen van de standaardbasis geldt

$$T(1) = (2x-1)' = 2, \quad T(x) = (2x^2 - x)' = 4x - 1, \quad T(x^2) = (2x^3 - x^2)' = 6x^2 - 2x,$$

dus is $A = [T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

De inverse matrix van deze matrix is $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ en laat zich bepalen door $(A \mid I_3)$ middels elementaire rijtransformaties naar $(I_3 \mid B)$ te transformeren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[M_1(\frac{1}{2}), M_2(\frac{1}{4}), M_3(\frac{1}{6})]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[O_{32}(\frac{1}{2})]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[O_{21}(\frac{1}{2})]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

We kunnen $p(x)$ met $T(p(x)) = 6x^2 - 6x + 5$ vinden door A^{-1} met de coördinaatvector $[p(x)]_\beta$ van $6x^2 - 6x + 5$ te vermenigvuldigen: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus is $p(x) = x^2 - x + 2$.

Alternatief kunnen we het stelsel lineaire vergelijkingen $Av = [p(x)]_\beta$ oplossen, dus $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Omdat het stelsel al geveegd is, kunnen we van beneden naar boven oplossen: $c_2 = 1$, $4c_1 - 2 = -6$, dus $c_1 = -1$ en $2c_0 + 1 = 5$, dus $c_0 = 2$. Ook op deze manier vinden we $p(x) = x^2 - x + 2$.

Het kan zelfs middels de hoofdstelling van de Calculus: Uit $(2x-1)p(x))' = 6x^2 - 6x + 5$ volgt $(2x-1)p(x) = \displaystyle\int (6x^2 - 6x + 5)\, dx = 2x^3 - 3x^2 + 5x + c$ voor een constante c. Een staartdeling geeft nu $(2x^3 - 3x^2 + 5x + c) : (2x-1) = x^2 - x + 2$, waarbij $c = -2$ gekozen moet worden.

(iii) **(3 punten)** Er laat zich reeds aan de matrix A uit deel (ii) aflezen dat de eigenwaarden 2, 4 en 6 zijn. De corresponderende eigenruimten E_λ laten zich als kern van $A - \lambda I_3$ bepalen:

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ heeft kern $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, dus is $E_2 = \mathrm{span}(1)$.

$\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ heeft kern $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$, dus is $E_4 = \mathrm{span}(2x-1)$.

$\lambda = 6$: $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ heeft kern $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix})$, dus is $E_6 = \mathrm{span}(4x^2 - 4x + 1)$.

(iv) **(2 punten)** Een eigenvector voor T voor de eigenwaarde λ is een eigenvector voor T^{-1} voor de eigenwaarde λ^{-1}.

De eigenvectoren uit deel (iii) vormen dus een basis $\gamma = (1, 2x-1, 4x^2 - 4x + 1)$ uit eigenvectoren voor T^{-1} en met betrekking tot deze basis heeft T^{-1} de diagonaalmatrix $B = [T^{-1}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ (waarbij het niet nodig was de matrix B expliciet aan te geven).